TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 265, Number 2, June 1981

RÉALISATION DE MORPHISMES DONNÉS EN COHOMOLOGIE ET SUITE SPECTRALE D'EILENBERG-MOORE

PAR

MICHELINE VIGUÉ-POIRRIER

RÉSUMÉ. On construit une suite d'obstructions à la réalisation par une application entre types d'homotopie rationnelle, d'un morphisme donné en cohomologie. On donne, sous des hypothèses de finitude, des conditions simples d'existence de réalisation. On montre aussi que, pour des algèbres différentielles commutatives graduées sur un corps de caractéristique 0, la réalisation d'un morphisme donné en cohomologie dépend, en général, du corps de base. La technique utilisée est la construction du modèle minimal bigradué d'un homomorphisme d'algèbres commutatives graduées, puis du modèle filtré d'une application continue, par déformation des différentielles du modèle bigradué de l'application induite en cohomologie. Cette construction est utilisée pour donner une méthode explicite de calcul de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore (E_i, d_i) d'un carré fibré. On en déduit des critères pour que $d_i = 0$, $i > 2$.

Dans [12], S. Halperin et J. Stasheff étudient le problème suivant: étant donnés deux C.W. complexes de type fini simplement connexes et un isomorphisme f: $H^*(S, \mathbf{Q}) \leftarrow H^*(T, \mathbf{Q})$, peut-on réaliser f par une équivalence d'homotopie entre les types d'homotopie rationnelle de S et T? Ils construisent une suite d'obstructions $O_n(f)$ à la réalisation d'un tel isomorphisme et montrent que f est réalisable si et seulement si toutes les obstructions $O_n(f)$ sont nulles. Ils donnent aussi des formules explicites pour le calcul de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore $E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(X)}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}) \Rightarrow H^*(\Omega X)$.

L'origine de notre travail était de généraliser l'étude de S. Halperin et J. Stasheff; nous nous sommes posée les questions suivantes:

Problème 1. Soient S et T deux C.W. complexes nilpotents de type fini et soit f un homomorphisme d'algèbres $H^*(S, \mathbf{Q}) \leftarrow H^*(T, \mathbf{Q})$. Est-ce que f est réalisable par une application (définie à homotopie près) entre les types d'homotopie rationnelle de S et T?

Nous définissons, ici aussi, une suite d'obstructions $O_n(f)$ à la réalisation d'un tel homomorphisme, chaque $O_n(f)$ est une variété algébrique affine et nous avons:

THÉORÈME. *Si* $H^1(T, \mathbf{Q}) = 0$ *et s'il existe un entier* $m \geq 1$ *tel que* $H^p(S, \mathbf{Q}) = 0$, $p \geq m$. *Alors* f *est réalisable si et seulement si pour tout* n, $0 \in O_{n+1}(f)$.

Received by the editors September 26, 1979 and, in revised form, February 19, 1980.

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 55F05, 55F20, 55G35, 55H10, 55H20.

Key words and phrases. Rational homotopy type, minimal models, commutative graded differential algebras, formal, obstruction theory, Eilenberg-Moore spectral sequence, Serre fibrations, Serre spectral sequence.

0002-9947/81/0000-0257/$10.50

COROLLAIRE 3.1.5. *S'il existe un entier* $l \geqslant 1$ *tel que* $H^p(T, \mathbf{Q}) = 0$, $1 \leqslant p \leqslant l$, *et* $H^p(S, \mathbf{Q}) = 0$, $p > 3l + 1$, *alors tout morphisme* $f\colon H^*(T, \mathbf{Q}) \to H^*(S, \mathbf{Q})$ *est réalisable.*

L'outil privilégié pour l'étude d'un tel problème est la théorie du modèle minimal de D. Sullivan [**17**]. Cette théorie établit une équivalence de catégories entre la catégorie homotopique rationnelle $\mathcal{T}_{\mathbf{Q}}$ (voir [**14**]) dont les objets sont les $\mathbf{Q}$-espaces ayant le type d'homotopie d'un C.W. complexe de type fini, et la catégorie $\mathfrak{M}_{\mathbf{Q}}$ des $\mathbf{Q}$-algèbres différentielles graduées minimales nilpotentes de type fini. A un espace $T \in \mathcal{T}_{\mathbf{Q}}$, on associe une algèbre minimale $(\Lambda X_T, d_T)$ sur $\mathbf{Q}$ dont la cohomologie est isomorphe à la cohomologie singulière rationnelle de T, et qui décrit entièrement le type d'homotopie rationnelle de T.

Dans la catégorie $\mathfrak{M}_k$ des algèbres différentielles graduées minimales nilpotentes de type fini sur un corps k de caractéristique 0, nous poserons un problème analogue au problème topologique:

Soient (A, d_A) et $(A', d_{A'})$ deux objets de $\mathfrak{M}_k$, et soit β un homomorphisme d'algèbres $H^*(A, d_A) \to H^*(A', d_{A'})$. Est-ce que β est réalisable par un morphisme d'algèbres différentielles graduées $\alpha\colon (A, d_A) \to (A', d_{A'})$?

PROPOSITION. *Soient S et T deux espaces nilpotents ayant le type d'homotopie d'un C.W. complexe de type fini. Soit f un morphisme* $H^*(T, \mathbf{Q}) \to H^*(S, \mathbf{Q})$. *Alors f est réalisable si et seulement si le morphisme correspondant* $\hat{f}\colon H^*(\Lambda X_T) \to H^*(\Lambda X_S)$ *est réalisable dans* $\mathfrak{M}_{\mathbf{Q}}$. ($\Lambda X_T$ (*resp.* ΛX_S) *est le modèle minimal de T* (*resp. de S*).)

Nous sommes alors ramenée à étudier un problème purement algébrique.

Une autre question se pose ensuite:

Problème 2. Soient (A, d_A) et $(A', d_{A'})$ deux objets de $\mathfrak{M}_k$, soit f un homomorphisme: $H(A, d_A) \to H(A', d_{A'})$, et soit K un corps contenant k. Supposons que $f \otimes \mathbf{1}_K$ soit réalisable, est-ce que f est réalisable?

Dans [**12**], Halperin et Stasheff ont montré que si f est un isomorphisme et si $f \otimes \mathbf{1}_K$ est réalisable, alors f est réalisable.

Par contre, dans le cas général, la réponse au Problème 2 est non; nous avons:

EXEMPLE 3.2.2. Soit $H = \Lambda(x_1, x_2, x_3)/(x_1^2, x_1x_2, x_3^3)$ la $\mathbf{Q}$-algèbre graduée engendrée par les générateurs x_1 en degré 12, x_2 en degré 15, x_3 en degré 26. Il existe des $\mathbf{Q}$-algèbres différentielles graduées (A, d_A) et $(A', d_{A'})$ de cohomologie H telles que le morphisme $f\colon H \to H$ défini par $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0, f(x_3) = x_3$ est réalisable sur $\mathbf{R}$, et non sur $\mathbf{Q}$.

Problème 3. Peut-on construire un modèle filtré d'une application continue qui permettra de donner des formules simples pour le calcul de la suite spectrale générale d'Eilenberg-Moore?

Nous résolvons ce problème en donnant une méthode explicite de calcul qui n'utilise pas la bar construction et qui permet de connaître la cohomologie de l'espace total d'un fibré image réciproque, ou la cohomologie de la fibre d'un fibré de Serre.

Soient $F \to E \xrightarrow{f} B$ un fibré de Serre et $g\colon B' \to B$ une application continue, on suppose que les espaces sont connexes par arcs. Soit $F \to E' \xrightarrow{f'} B'$ le fibré image réciproque. Nous exhibons une ADGC filtrée, modèle de E', et nous définissons une suite spectrale associée à la filtration de cette ADGC, nous démontrons (Théorème 4.2.5) qu'elle est isomorphe, par un isomorphisme d'ADGC à partir du terme E_2, à la suite spectrale d'Eilenberg-Moore définie dans **[16]**.

Nous donnons de nombreuses applications de ce théorème. Nous étudions des relations entre la propriété "$E_2 = E_\infty$" pour la suite spectrale de Serre du fibré $F \to E \to B$ et la propriété "$E_2 = E_\infty$" pour la suite spectrale d'Eilenberg-Moore. Nous donnons des conditions pour que la fibre d'une application formelle soit formelle (Théorème 4.4.4).

Le plan de cet article est le suivant: Dans le Chapitre I, nous ferons des rappels sur la théorie des algèbres commutatives différentielles graduées. Dans le Chapitre II, nous définissons la notion de modèle minimal bigradué d'un morphisme d'algèbres graduées, puis la notion de modèle filtré d'un morphisme d'algèbres différentielles graduées. Cette construction du modèle filtré sera utilisée dans le Chapitre III pour définir la notion de n-réalisabilité ($n \geqslant 0$); on y définit une obstruction à prolonger une n-réalisation en une $n+1$-réalisation. Ceci nous permet de démontrer le Théorème 3.1.5. On donne aussi des formules permettant de comparer les obstructions correspondant à deux n-réalisations distinctes pour $n = 1$ et $n = 2$. On démontre alors le Théorème 3.1.8, ainsi que les théorèmes concernant le changement de corps de base. Dans le Chapitre IV, nous utilisons notre construction du modèle filtré d'une application continue pour résoudre le Problème 3.

Je remercie Dennis Sullivan qui m'a initiée à la théorie de l'homotopie rationnelle, Stephen Halperin qui m'a posé les questions qui ont été le point de départ de ce travail, et a guidé mes recherches sur ce sujet, enfin Daniel Lehmann qui a porté un intérêt constant à mon travail et dont les conseils m'ont permis d'améliorer bon nombre de mes résultats.

CHAPITRE I. PRÉLIMINAIRES ALGÉBRIQUES

Dans toute la suite, on considère des k-algèbres graduées où k est un corps de caractéristique 0 et l'indice de la graduation parcourt $\mathbf{N}$. Ces algèbres sont commutatives dans le sens suivant: si $H = \bigoplus_{p>0} H^p$ est une k-algèbre graduée si $a \in H^p$ et $b \in H^q$, alors $b.a = (-1)^{pq} a.b$.

On notera $|a|$ le degré de a.

Une algèbre commutative graduée est dite connexe si $H^0 = k$.

Une algèbre différentielle graduée commutative (notée ADGC) est une algèbre commutative graduée, A, munie d'une différentielle d: $A^p \to A^{p+1}$ vérifiant $d(a.b) = da.b + (-1)^{|a|} a.db$, et $d^2 = 0$.

La cohomologie de (A, d) est l'algèbre commutative graduée $H(A)$ donnée par $H(A) = \operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$.

Une algèbre différentielle graduée (A, d) est dite c-connexe si $H^0(A) = k$.

Une algèbre graduée $H = \bigoplus H^p$ est dite de type fini si les espaces vectoriels H^p sont de dimension finie pour tout p.

Si un morphisme d'ADGC induit un isomorphisme en cohomologie, on dit que c'est un quasi-isomorphisme.

Si (A, d_A) et (B, d_B) sont deux algèbres différentielles graduées, on définit l'algèbre différentielle graduée $A \otimes_k B$ muie de la différentielle d produit tensoriel de d_A et d_B de la manière suivante:

$$(a \otimes b).(a' \otimes b') = (-1)^{|b|.|a'|} aa' \otimes bb',$$
$$d(a \otimes b) = d_A a \otimes b + (-1)^{|a|} a \otimes d_B b$$

où $a \in A, a' \in A, b \in B, b' \in B$.

Si $X = \bigoplus_{p \geqslant 0} X^p$ est un k-espace vectoriel gradué, on notera ΛX, l'algèbre commutative graduée libre suivante:

$$\Lambda X = S\Big(\bigoplus_p X^{2p}\Big) \otimes E\Big(\bigoplus_p X^{2p+1}\Big) \quad \text{où } S\big(\bigoplus X^{2p}\big)$$

est l'algèbre symétrique engendrée par les éléments de degrés pairs de X, et $E(\bigoplus X^{2p+1})$ est l'algèbre extérieure engendrée par les éléments de degrés impairs.

DÉFINITION 1.1 [**11**]. Soit (B, d_B) une ADGC munie d'une augmentation ε: $B \to k$. Une extension de Koszul-Sullivan (en abrégé K-S extension) de base B est une suite d'ADGC:

$$(B, d_B) \overset{i}{\hookrightarrow} (B \otimes \Lambda X, d') \overset{\varepsilon \otimes 1}{\to} (\Lambda X, d'')$$

ayant les propriétés suivantes:

(1) ΛX est une algèbre libre, il existe un ensemble bien ordonné I tel que $X = \bigoplus_{\alpha \in I} X_\alpha$, et pour tout α, il existe n_α tel que $X_\alpha \subset X^{n_\alpha}$ (i.e. les éléments de X_α sont homogènes de degré n_α).

(2) $d'(X_\alpha) \subset B \otimes \Lambda(\bigoplus_{\beta < \alpha} X_\beta)$, $\alpha \in I$.

(3) L'inclusion i et la projection $p = \varepsilon \otimes 1$ sont des morphismes d'ADGC.

Une K-S extension est dite minimale si n_α est une fonction croissante de α.

Si $B = k$, une algèbre libre $(\Lambda X, d)$ vérifiant (1), (2) et (3) est appelée une K-S algèbre libre.

DÉFINITION 1.2. *Notion d'homotopie* [**11**]. Soit

$$(B, d_B) \overset{\text{incl}}{\hookrightarrow} (B \otimes \Lambda X, d') \overset{p}{\to} (\Lambda X, d'')$$

une K-S extension dont la base (B, d_B) est une K-S algèbre libre connexe et dont la fibre ΛX est connexe.

Soit η: $(G, d_G) \to (E, d_E)$ un morphisme d'ADGC, et soient $(\phi_j)_{j=0,1}$ et $(\Psi_j)_{j=0,1}$ des morphismes d'ADGC rendant les diagrammes suivants commutatifs:

$$\begin{array}{ccc} (B, d_B) & \overset{\Psi_j}{\to} & (G, d_G) \\ \text{incl}\downarrow & & \downarrow\eta \\ (B \otimes \Lambda X, d') & \overset{\phi_j}{\to} & (E, d_E) \end{array}$$

$j = 0, 1$.

Si $B = (\Lambda Z, d)$, on définit l'ADGC (B^I, D) comme étant l'ADGC $(\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z} \otimes \Lambda D\bar{Z}, D)$ où

(i) $D|_{\Lambda Z} = d$,

(ii) $\bar{Z}$ est l'espace gradué défini par $\bar{Z}^p = Z^{p+1}$.

Une dérivation i de degré -1 est définie par $iz = \bar{z}$, $i\bar{z} = 0$, $iD\bar{z} = 0$, alors

$$\exp(iD + Di) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iD + Di)^n}{n!}$$

est un automorphisme de l'ADGC (B^I, D); (la somme $\Sigma_0^\infty (iD + Di)^n(x)/n!$ est finie, pour tout $x \in B^I$).

Soit λ_0 l'inclusion $(\Lambda Z, d) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda \bar{Z} \otimes \Lambda D\bar{Z}, D)$, et posons

$$\lambda_1 = \exp(iD + Di)\lambda_0.$$

On définit de même l'ADGC $[(B \otimes \Lambda X)^I, D']$.

Le couple (Ψ_0, ϕ_0) est dit homotope au couple (Ψ_1, ϕ_1) s'il existe un carré commutatif de morphismes d'ADGC

$$\begin{array}{ccc} (B^I, D) & \xrightarrow{\Psi} & (G, d_G) \\ \text{incl}\downarrow & & \downarrow\eta \\ ((B \otimes \Lambda X)^I, D') & \xrightarrow{\Phi} & (E, d_E) \end{array}$$

tel que $\Psi \circ (\lambda_j)_B = \psi_j$ et $\Phi \circ \lambda_{j(B \otimes \Lambda X)} = \phi_j, j = 0, 1$.

Si $B = k = G$, alors Φ est une homotopie de ϕ_0 à ϕ_1.

On peut alors énoncer le théorème d'existence et d'unicité du modèle minimal d'un morphisme d'ADGC. Ce théorème démontré dans **[11]** et **[17]**, généralise la notion de modèle minimal d'une algèbre différentielle graduée.

THÉORÈME 1.3. *Soit* γ: $(B, d_B) \to (E, d_E)$ *un morphisme d'ADGC c-connexes. Alors il existe une K-S extension minimale de base* B: $(B, d_B) \xrightarrow{i} (B \otimes \Lambda X, d') \xrightarrow{p} (\Lambda X, d'')$ *et un morphisme* ϕ: $(B \otimes \Lambda X, d') \to (E, d_E)$ *tel que*

(i) $\phi \circ i = \gamma$,

(ii) ϕ^* *est un isomorphisme.*

On montre qu'une K-S extension minimale de base B vérifiant (i) et (ii) est unique à isomorphisme près. Elle est appelée le modèle minimal de γ de base B.

On déduit du Théorème 1.3 le théorème suivant:

THÉORÈME. 1.4. *Soit* γ: $(G, d_G) \to (E, d_E)$ *un morphisme d'ADGC c-connexes. Alors il existe une K-S algèbre libre minimale* $(\Lambda Z, d)$ *et un morphisme* ψ: $(\Lambda Z, d) \to (G, d_G)$ *et il existe une K-S extension minimale de base* $(\Lambda Z, d)$: $(\Lambda Z, d) \xrightarrow{i} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \xrightarrow{p} (\Lambda X, d'')$ *et un morphisme* ϕ: $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \to (E, d_E)$ *tels que*:

(i) $\phi \circ i = \gamma \circ \psi$,

(ii) ψ^* *et* ϕ^* *sont des isomorphismes.*

De plus, on a un critère d'unicité d'une telle extension.

La K-S extension minimale: $(\Lambda Z, d) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d')$ *est appelée le modèle minimal de* γ.

DÉFINITION 1.5. Une K-S algèbre libre minimale $(\Lambda X, d)$ est dite nilpotente si la fonction: $I \ni \alpha \to n_\alpha \in \mathbf{N}$ est finie en chaque dimension. Si, de plus, X_α est de dimension finie pour tout α, on dit que l'algèbre est nilpotente de type fini.

On définit alors la catégorie $\mathfrak{M}_k$ dont les objets sont les K-S algèbres minimales nilpotentes de type fini et les morphismes sont les classes d'homotopie de morphismes.

Soit maintenant $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{f} B$ un fibré de Serre dont les espaces sont connexes par arcs. Si k est un corps de caractéristique 0 fixé, on note, pour tout espace connexe M, $A(M) = A^*_{\mathbf{Q}}(M) \otimes_{\mathbf{Q}} k$ où $A^*_{\mathbf{Q}}(M)$ est la $\mathbf{Q}$-ADGC définie par Sullivan à l'aide des P.L. formes **[14]**, **[17]**.

D'après le Théorème 1.3, le morphisme $A(f)$: $A(B) \to A(E)$ a un modèle minimal de base $A(B)$:

$$\begin{array}{ccccc} A(B) & \xrightarrow{A(f)} & A(E) & \xrightarrow{A(j)} & A(F) \\ \| & & \uparrow\varphi & & \\ A(B) & \xrightarrow{i} & A(B) \otimes \Lambda U & \xrightarrow{p} & (\Lambda U, \bar{d}) \end{array}$$

et le morphisme φ induit un morphisme α: $(\Lambda U, \bar{d}) \to A(F)$.

THÉORÈME 1.6 **[11]**. *Supposons que*:

(1) *$H^*(B, k)$ ou $H^*(F, k)$ soit de type fini,*

(2) *$\pi_1(B)$ agit de manière nilpotente sur $H^*(F, k)$.*

Alors α^* est un isomorphisme, donc α: $(\Lambda U, \bar{d}) \to A(F)$ est le modèle minimal de F.

Soit maintenant une application continue g': $B' \to B$ où B' est connexe par arcs, et soit $F \to E' = B' \times_B E \xrightarrow{f'} B'$ le fibré image réciproque. Alors $A(g)$: $A(B) \to A(B')$ est un morphisme d'ADGC et on peut considérer l'ADGC: $A(B') \otimes_{A(B)} (A(B) \otimes_k \Lambda U) \simeq A(B') \otimes_k \Lambda U$. Alors $A(B') \to A(B') \otimes \Lambda U \to \Lambda U$ est une K-S extension minimale et on a un diagramme commutatif d'ADGC:

$$\begin{array}{ccccc} A(B') & \xrightarrow{A(f')} & A(E') & \to & A(F) \\ \| & & \uparrow\varphi_1 & & \uparrow\alpha \\ A(B') & \to & A(B') \otimes \Lambda U & \to & \Lambda U \end{array}$$

On déduit du Théorème 1.6 et d'un théorème d'isomorphie:

THÉORÈME 1.7 **[11]**. *Supposons que*:

(1) *$\pi_1(B)$ agit de manière nilpotente sur $H^*(F, k)$,*

(2) *ou bien $H^*(F)$ est de type fini, ou bien $H^*(B)$ et $H^*(B')$ sont de type fini.*

Alors φ_1^* est un isomorphisme, donc $A(B') \to A(B') \otimes_{A(B)} (A(B) \otimes_k \Lambda U)$ est le modèle minimal de base $A(B')$ de $A(f')$.

CHAPITRE II. LE MODÈLE MINIMAL BIGRADUÉ D'UN MORPHISME D'ALGÈBRES GRADUÉES ET LE MODÈLE FILTRÉ D'UN MORPHISME D'ALGÈBRES DIFFÉRENTIELLES GRADUÉES

1. Modèle minimal bigradué d'un morphisme d'algèbres commutatives graduées. Dans **[12]**, Halperin et Stasheff construisent le modèle minimal bigradué d'une algèbre H connexe, vérifiant les propriétés suivantes:

THÉORÈME 2.1.1 (HALPERIN-STASHEFF). *Il existe des espaces gradués* $(Z_i)_{i\geqslant 0}$ *et une différentielle d homogène de degré inférieur* -1 *sur* $\Lambda Z = \Lambda(\bigoplus_{i\geqslant 0} Z_i)$, *il existe un morphisme d'ADGC* ρ: $(\Lambda Z, d) \to (H, 0)$ *nul sur* $\Lambda(\bigoplus_{i>0} Z_i)$ *tel que*:

(1) ρ^*: $H_0(\Lambda Z, d) \to H$ *est un isomorphisme.*

(2) $H_+(\Lambda Z, d) = 0$.

(3) $(\Lambda Z, d) \overset{\rho}{\to} H$ *est le modèle minimal de* H.

Soient H et H' deux algèbres commutatives graduées connexes (sur un corps k) et β un morphisme H dans H'. On suppose, dans toute la suite, que β^1: $H^1 \to H'^1$ est injective. Si β est le morphisme induit en cohomologie par un fibré de Serre f: $E \to B$ à fibre connexe, cette hypothèse est satisfaite.

Soit donc $(\Lambda Z, d) \overset{\rho}{\to} H$ le modèle minimal bigradué de H donné par le Théorème 2.1.1. On va construire un modèle minimal de β vérifiant les conclusions du Théorème 1.4, tel que ΛX soit bigradué

$$\begin{array}{ccccc} H & \overset{\beta}{\to} & H' & & \\ \rho\uparrow & & \uparrow\rho' & & \\ (\Lambda Z, d) & \overset{i}{\to} & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') & \overset{p}{\to} & (\Lambda X, d'') \end{array}$$

On va définir des espaces bigradués $X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ et on posera $X = \bigoplus_{n\geqslant 0} X_n$. Si $Y_n = Z_n \oplus X_n$, on construira une différentielle d' sur $\Lambda Y = \Lambda(\bigoplus Y_n) = \Lambda Z \otimes \Lambda X$ abaissant la graduation inférieure de ΛY de un. L'application ρ' sera définie sur $\Lambda Y_0 = \Lambda Z_0 \otimes \Lambda X_0$, de façon que $\rho' i = \beta\rho$ et prolongée par 0 sur Y_n, $n \geqslant 1$. On écrira

$$Z_{(n)} = \bigoplus_{i<n} Z_i, \quad X_{(n)} = \bigoplus_{i<n} X_i \quad \text{et} \quad Y_{(n)} = \bigoplus_{i<n} (X_i \oplus Z_i).$$

Pour tout n, la sous-algèbre $\Lambda Y_{(n)}$ est stable par d' et on note

$$H_i(\Lambda Y_{(n)}, d') = \frac{(\Lambda Y_{(n)})_i \cap \operatorname{Ker} d'}{d'[(\Lambda Y_{(n)})_{i+1}]} \quad \text{pour } i \geqslant 0$$

et on vérifie que $H(\Lambda Y_{(n)}, d') = \bigoplus_{i\geqslant 0} H_i(\Lambda Y_{(n)}, d')$.

La différentielle d' et le morphisme ρ' seront construits de façon que les conditions (c_i) suivantes soient vérifiées:

(c_0) ρ': $\Lambda Y_0 = \Lambda Z_0 \otimes \Lambda X_0 \to H'$ est surjective,

(c_1) ρ'^*: $H_0(\Lambda Y_{(1)}, d') \overset{\simeq}{\to} H'$ est un isomorphisme,

(c_n) ρ'^*: $H_0(\Lambda Y_{(n)}, d') \overset{\simeq}{\to} H'$ est un isomorphisme, et $H_i(\Lambda Y_{(n)}, d') = 0$ pour $1 \leqslant i < n$ et $n \geqslant 2$.

Nous allons maintenant expliquer la construction un peu technique des X_n, de d' et de ρ'.

Construction en degré 0. Soit $Z_0 = H^+/H^+.H^+$ l'espace des générateurs de l'algèbre H et π la projection: $H^+ \to Z_0$. De même, on définit $Z_0' = H'^+/H'^+.H'^+$ et π' est la projection: $H'^+ \to Z_0'$.

Le morphisme β induit une application linéaire $\bar{\beta}$: $Z_0 \to Z_0'$ telle que $\bar{\beta}\pi = \pi'\beta$. Soit μ la projection de Z_0' sur Coker $\bar{\beta}$.

On pose alors $X_0 = \operatorname{Coker} \bar{\beta}$ et $d' = 0$ sur X_0.

Soit σ une section de la projection $\mu\pi'$: $H'^{+} \to X_0 = \operatorname{Coker} \beta$.

On définit alors ρ': $\Lambda Y_0 = \Lambda Z_0 \otimes \Lambda X_0 \to H'$ par ses restrictions à ΛZ_0 et ΛX_0, on pose $\rho'|_{Z_0} = \beta\rho$, $\rho'|_{X_0} = \sigma$.

On vérifie que ρ': $\Lambda Y_0 \to H'$ est surjective car, par construction, l'espace vectoriel Z_0' est engendré par $\pi'\beta\rho(Z_0)$ et $\pi'\sigma(X_0)$.

Construction en degré 1. La condition (c_1) sera vérifiée si et seulement si on a $\operatorname{Ker} \rho' = d'((\Lambda Y)_1)$. Notons $d(Z_1).\Lambda Y_0$ l'idéal engendré par dZ_1 dans ΛY_0 et $L_1 = \operatorname{Ker} \rho'/d'(Z_1).\Lambda Y_0$ est un ΛY_0-module gradué. On a $L_1 = \bigoplus_{n>0} L_1^n$ et on vérifie que $L_1^1 = 0$ car $(\operatorname{Ker} \beta)^1 = 0$.

On pose alors $X_1^p = (L_1/\Lambda^+ Y_0.L_1)^{p+1}$ pour $p \geqslant 1$, $X_1 = \bigoplus X_1^p$, $Y_1 = \bigoplus_p (Z_1^p \oplus X_1^p)$. ($X_1$ est l'espace des générateurs du ΛY_0-module L_1.)

On définit d': $X_1 \to \operatorname{Ker} \rho' \subset \Lambda Y_0$ en choisissant une section de la projection $\operatorname{Ker} \rho' \to L_1 \to X_1 \to 0$.

On pose $d'|_{Z_1} = d$ et $\rho'|_{Y_1} = 0$.

Il est clair que d' est une différentielle sur $\Lambda Y_{(1)}$, homogène de degré inférieur -1, et on a $\rho' d' = 0$.

Il est facile de voir que la condition (c_1) est vérifiée, et de plus on a: $d'(X_1) \subset \operatorname{Ker} \bar{\beta} + \Lambda^+ Y_0.\Lambda^+ Y_0 \subset Z_0 + \Lambda^+ Y_0.\Lambda^+ Y_0$.

Construction en degré $n \geqslant 2$. Supposons que $(\Lambda Y_{(n)}, d')$ ait été construit pour un certain $n \geqslant 1$ de façon que le diagramme suivant soit un diagramme commutatif de morphismes d'ADGC:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\beta} & H' \\ \rho\uparrow & & \uparrow\rho' \\ (\Lambda Z_{(n)}, d) & \to & [(\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(n)}, d'] \end{array}$$

On remarque que

$$H_n(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)}, d') = \frac{(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)})_n \cap \operatorname{Ker} d'}{d'([\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)}]_{n+1})}$$

est un $H_0(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)})$-module gradué.

On pose alors

$$X_{n+1}^p = \left[H_n(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)}) \middle/ H_0^+(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)}).H_n(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)}) \right]^{p+1}$$

et $X_{n+1} = \bigoplus X_{n+1}^p$, on définit d': $X_{n+1}^p \to (\Lambda Y_{(n)} \cap \operatorname{Ker} d')_n^{p+1}$ comme étant une section de la composée τ_n des projections

$$(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)})_n \cap \operatorname{Ker} d' \to H_n(\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(n)}) \to X_{n+1}.$$

On pose $d'|_{Z_{n+1}} = d$ et $\rho'|_{Y_{n+1}} = 0$.

LEMME 2.1.2. (i) $(\Lambda Y)_n \cap \operatorname{Ker} d' \subset Z_n + \Lambda^+ Y.\Lambda^+ Y$ *pour tout* $n \geqslant 1$.
(ii) $Y_n = \bigoplus_{p \geqslant 1} Y_n^p$ *pour tout* $n \geqslant 0$.
(iii) *Les conditions* (c_n) *sont vérifiées pour tout* $n \geqslant 0$.
(iv) $d'(X_{n+1}) \subset Z_n + \Lambda^+ Y.\Lambda^+ Y$ *pour tout* $n \geqslant 0$.

DÉMONSTRATION. Elle est analogue à celle du Lemme 3.6 de **[12]**.

On peut maintenant énoncer le théorème d'existence et d'unicité du modèle minimal bigradué d'un morphisme.

THÉORÈME 2.1.3. (1) *Existence. Soient H et H' deux algèbres commutatives graduées connexes et β: $H \to H'$ un morphisme d'algèbres graduées injectif en degré* 1. *Alors il existe un modèle minimal bigradué de β*

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{\beta} & H' & & \\ \rho\uparrow & & \uparrow\rho' & & \\ (\Lambda Z, d) & \to & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') & \xrightarrow{p} & (\Lambda X, d'') \end{array}$$

De plus:

(i) ρ^*: $H_0(\Lambda Z, d) \xrightarrow{\sim} H$ *et* $H_+(\Lambda Z, d) = 0$,

(ii) ρ'^*: $H_0(\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \xrightarrow{\sim} H'$ *et* $H_+(\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') = 0$.

(2) *Unicité. Supposons qu'il existe un modèle minimal de β*

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{\beta} & H' & & \\ \mu\uparrow & & \uparrow\mu' & & \\ (\Lambda W, \delta) & \xrightarrow{j} & (\Lambda W \otimes \Lambda T, \delta') & \xrightarrow{q} & (\Lambda T, \delta'') \end{array}$$

tel que

(i) $W = \bigoplus W_n^p$ *est bigradué et δ est homogène de degré inférieur* -1.

(ii) $T = \bigoplus T_n^p$ *est bigradué et δ' est homogène de degré inférieur* -1 *dans* $\Lambda W \otimes \Lambda T$.

(iii) μ^*: $H_0(\Lambda W, \delta) \simeq H$, $H_+(\Lambda W) = 0$, $\mu(\Lambda W_+) = 0$.

(iv) μ'^*: $H_0(\Lambda W \otimes \Lambda T, \delta') \simeq H'$, $H_+(\Lambda W \otimes \Lambda T) = 0$, $\mu'[(\Lambda W \otimes \Lambda T)_+] = 0$.

Alors il existe des isomorphismes d'ADGC:

ζ: $(\Lambda Z, d) \to (\Lambda W, \delta)$, θ: $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \to (\Lambda W \otimes \Lambda T, \delta')$,

η: $(\Lambda X, d'') \to (\Lambda T, \delta'')$, *homogènes de bidegré* 0, *rendant commutatifs les carrés suivants*:

$$\begin{array}{ccccc} (\Lambda Z, d) & \overset{\text{incl}}{\hookrightarrow} & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') & \xrightarrow{p} & (\Lambda X, d'') \\ \zeta\downarrow & & \theta\downarrow & & \downarrow\eta \\ (\Lambda W, \delta) & \hookrightarrow & (\Lambda W \otimes \Lambda T, \delta') & \to & (\Lambda T, \delta'') \end{array}$$

De plus, $\rho' = \mu'\theta$ *et* $\rho = \mu\zeta$.

DÉMONSTRATION. (1) *Existence*. Les parties (ii) et (iii) du Lemme 2.1.2. montrent que $(\Lambda Z, d) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \to (\Lambda X, d'')$ est une K-S extension et que les conclusions (1)(i) et (ii) du théorème sont vraies. De plus, $(\Lambda Z, d) \xrightarrow{\rho} H$ est le modèle minimal de H et la partie (i) du Lemme 2.1.2 montre que la K-S extension est minimale. C'est donc le modèle minimal de β.

(2) *Unicité*. Dans **[12]**, Halperin et Stasheff prouvent l'existence d'un isomorphisme ζ tel que $\rho = \mu\zeta$. Par la même méthode, on montre l'existence d'un morphisme d'ADGC θ: $\Lambda Z \otimes \Lambda X \to \Lambda W \otimes \Lambda T$ bihomogène de degré 0 tel que $\theta i = j\zeta$ et $\rho' = \mu'\theta$. Par passage au quotient, θ définit un morphisme d'ADGC η: $(\Lambda X, d'') \to (\Lambda T, \delta'')$, bihomogène de degré 0 et on a $\eta p = q\theta$. Des théorèmes d'isomorphisme entre K-S extensions minimales de **[11]**, on déduit que η est un isomorphisme, puis que θ est un isomorphisme.

DÉFINITION 2.1.4. La K-S extension minimale $(\Lambda Z, d) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d')$ définie par le Théorème 2.1.3 s'appelle le modèle minimal bigradué de β.

REMARQUES 2.1.5. (1) Si $H = k$ et β est l'inclusion $k \to H'$, alors $\Lambda Z = k$, et la construction précédente est celle de Halperin-Stasheff **[12]**.

(2) Si β est un isomorphisme, la construction précédente donne que $X = 0$, et $(\Lambda Z, d) \xrightarrow{\beta\rho} H'$ est le modèle minimal bigradué de H'.

(3) Par construction, on a $X_0 = 0$ si et seulement si β est surjective.

(4) En général, la K-S algèbre libre $(\Lambda Y, d')$ n'est pas minimale, comme on le verra sur des exemples. Cependant, on a le résultat suivant:

PROPOSITION 2.1.6. *$(\Lambda Y_{(1)}, d')$ est minimale si et seulement si*

$$\beta^{-1}(H'^{+}.H'^{+}) \subset H^{+}.H^{+}.$$

COROLLAIRE 2.1.7. *Si H est une algèbre libre, alors $(\Lambda Y, d') \xrightarrow{\rho'} H'$ est le modèle minimal bigradué de H' si et seulement si $\beta^{-1}(H'^{+}.H'^{+}) \subset H^{+}.H^{+}$.*

EXEMPLE 2.1.8. Soit H une algèbre commutative graduée connexe telle que $H^1 = 0$, et soit β la projection: $H \to k = H^0$.

Soit

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{\beta} & k & & \\ \uparrow\rho & & \uparrow\rho' & & \\ (\Lambda Z, d) & \to & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') & \to & (\Lambda X, d'') \end{array}$$

le modèle minimal bigradué de β.

Notons $Q(d')$ l'application linéaire induite par d' sur l'espace vectoriel $Z \oplus X$ des éléments indécomposables.

On peut montrer que $Q(d')$ est un isomorphisme de X_m^p sur Z_{m-1}^{p+1}, et que $d'' = 0$.

REMARQUE 2.1.9. L'exemple précédent montre que, en général, $H_{+}(\Lambda X, d'') \neq 0$. La *K-S* algèbre libre minimale bigraduée $(\Lambda X, d'')$ n'est pas le modèle minimal bigradué, au sens du Théorème 2.1.1, d'une algèbre commutative graduée. On verra, au Chapitre IV, que l'hypothèse que $H_{+}(\Lambda X, d'') = 0$ est forte.

2. Modèle filtré d'un morphisme d'algèbres différentielles graduées. Dans **[12]**, Halperin et Stasheff démontrent le théorème suivant:

THÉORÈME 2.2.1. *Soit (A, d_A) une ADGC c-connexe, et soit $(\Lambda Z, d)$ une ADGC telle que $\Lambda Z = \Lambda(\bigoplus_{p>0;\, n\geqslant 0} Z_n^p)$ est bigradué et d est homogène de degré inférieur -1, et soit ρ un morphisme d'ADGC $(\Lambda Z, d) \to H(A)$ tel que $\rho(\Lambda Z_{+}) = 0$. On suppose que les conditions $(c_n)_{n\geqslant 0}$ du paragraphe 1 sont vérifiées, pour le morphisme ρ: $(\Lambda Z, d) \to H(A)$. (On ne suppose pas que $(\Lambda Z, d)$ est minimale.) Alors il existe une ADGC $(\Lambda Z, D)$ et un morphisme π: $(\Lambda Z, D) \to (A, d_A)$ tel que:*

(E_1) *$D - d$: $Z_n \to \sum_{l\leqslant n-2} (\Lambda Z)_l$, $n \geqslant 0$,*

(E_2) *$\mathrm{cl}(\pi z) = \rho(z)$ si $z \in \Lambda Z_0$,*

(E_3) *π^* est un isomorphisme.*

De plus, si π': $(\Lambda Z, D') \to (A, d_A)$ *vérifie les conclusions* $(\mathrm{E}_i)_{i=1,2,3}$, *alors il existe un isomorphisme* ϕ: $(\Lambda Z, D) \to (\Lambda Z, D')$ *tel que*

(i) $\phi - \mathrm{id}$: $Z_n \to \Sigma_{l \leqslant n-1} (\Lambda Z)_l$,

(ii) $\pi'\phi$ *est homotope à* π.

$(\Lambda Z, D) \xrightarrow{\pi} (A, d_A)$ est appelé un modèle filtré de (A, d_A). Si $(\Lambda Z, d)$ est minimale, $(\Lambda Z, D) \xrightarrow{\pi} (A, d_A)$ s'appelle le modèle filtré de (A, d_A). C'est une K-S algèbre libre, non minimale en général.

Dans toute la suite, on filtrera l'algèbre bigraduée ΛZ de la manière suivante $F^{-p}(\Lambda Z) = \Sigma_{n \leqslant p} (\Lambda Z)_n, p \geqslant 0$, et $F^{+1} = 0$. C'est une filtration décroissante, et la différentielle D préserve la filtration.

La démonstration du Théorème 2.2.1 repose, de manière fondamentale, sur le lemme suivant:

Lemme 2.2.2 **[12]**. *Soit H une algèbre graduée connexe, soit* $(\Lambda Z, d)$ *une ADGC telle que* $\Lambda Z = \Lambda(\bigoplus_{p>0;\, n\geqslant 0} Z_n^p)$ *est bigradué et d est homogène de degré inférieur* -1, *et soit* ρ *un morphisme d'ADGC*: $(\Lambda Z, d) \to H$ *tel que* $\rho(\Lambda Z_+) = 0$. *On suppose que les conditions* $(\mathrm{c}_n)_{n\geqslant 0}$ *du paragraphe* 1 *sont vérifiées. On fixe une application linéaire* η: $H \to \Lambda Z_0$ *tel que* $\rho\eta = \mathrm{id}_H$. *Soit* $(\Lambda Z_{(n)}, D)$ *une ADGC telle que* $D - d$: $Z_l \to F^{-(l-2)}(\Lambda Z)$, $0 \leqslant l \leqslant n$. *Alors, si* $u \in F^{-(n-1)}(\Lambda Z)$ *et vérifie* $Du = 0$, *il existe* $v \in F^{-n}(\Lambda Z)$ *et* $\alpha \in H$ *tels que* $u = Dv + \eta(\alpha)$.

Corollaire 2.2.3. *Soit* $(\Lambda Z, d) \xrightarrow{\rho} H$ *vérifiant les hypothèses du Lemme* 2.2.2. *Soit* $(\Lambda Z, D)$ *une ADGC telle que* $D - d$: $Z_n \to F^{-(n-2)}(\Lambda Z)$, $n \geqslant 0$. *Alors l'inclusion* λ: $\Lambda Z_0 \hookrightarrow \Lambda Z$ *induit un isomorphisme*

$$\lambda^*: H_0(\Lambda Z, d) = \Lambda Z_0 / d[(\Lambda Z)_1] \to H(\Lambda Z, D).$$

On définit ainsi un isomorphisme $\rho^*(\lambda^*)^{-1}$: $H(\Lambda Z, D) \to H$.

Démonstration du corollaire. D'après le Lemme 2.2.2, λ^* est surjective. L'injectivité découle des conditions (c_n).

Enonçons maintenant le théorème fondamental d'existence et d'"unicité" du modèle filtré d'un morphisme d'ADGC.

Théorème 2.2.4. *Soient* (A, d_A) *et* $(A', d_{A'})$ *deux ADGC c-connexes, et soit* α: $(A, d_A) \to (A', d_{A'})$ *un morphisme d'ADGC tel que* α^* *est injectif en degré* 1. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} H(A) & \xrightarrow{\alpha^*} & H(A') \\ \rho\uparrow & & \uparrow\rho' \\ (\Lambda Z, d) & \to & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') = (\Lambda Y, d') \end{array}$$

le modèle minimal bigradué de α^* *défini au Théorème* 2.1.3.

Soit $(\Lambda Z, D) \xrightarrow{\pi} (A, d_A)$ *le modèle filtré de A défini au Théorème* 2.2.1.

(1) *Existence. Alors il existe une ADGC* $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')$ *et un morphisme* π': $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \to (A', d_{A'})$ *vérifiant les conditions*:

(E_1) $D' - d'$: $Y_n \to F^{-(n-2)}(\Lambda Y)$,

(E_2) $\mathrm{cl}\, \pi'(y) = \rho'(y), y \in \Lambda Y_0$,

(E_3) π'^* *est un isomorphisme.*

De plus, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} (A, d_A) & \xrightarrow{\alpha} & (A', d_{A'}) \\ \pi\uparrow & & \uparrow\pi' \\ (\Lambda Z, D) & \xrightarrow{i} & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \end{array}$$

i = inclusion et $(\Lambda Z, D) \xrightarrow{i} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \xrightarrow{p} (\Lambda X, D'')$ *est une K-S extension.*

(2) *Unicité: Supposons qu'on ait un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} (A, d_A) & \xrightarrow{\alpha} & (A', d_{A'}) \\ \tilde{\pi}\uparrow & & \uparrow\tilde{\pi}' \\ (\Lambda Z, \tilde{D}) & \xrightarrow{i} & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, \tilde{D}') \end{array}$$

où les couples $(\Lambda Z, \tilde{D}) \xrightarrow{\tilde{\pi}} (A, d_A)$ *et* $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, \tilde{D}') \xrightarrow{\tilde{\pi}'} (A', d_{A'})$ *vérifient chacun les conditions* (E_1), (E_2), (E_3).

Alors il existe un isomorphisme ϕ: $(\Lambda Z, D) \to (\Lambda Z, \tilde{D})$ *et un isomorphisme* ϕ': $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X, \tilde{D}')$ *tels que:*

(i) $\phi - \mathrm{id}_{\Lambda Z}$ *et* $\phi' - \mathrm{id}_{\Lambda Z \otimes \Lambda X}$ *font décroitre strictement la filtration.*

(ii) $\phi' i = i\phi$.

(iii) *le couple* $(\tilde{\pi}\phi, \tilde{\pi}'\phi')$ *est homotope au couple* (π, π').

DÉMONSTRATION. (1) *Existence.* On construit D' et π' par récurrence sur $Y_0 = Z_0 \oplus X_0, \ldots, Y_n = Z_n \oplus X_n, \ldots$. Sur Z_n, on prendra $D' = D$ et $\pi' = \alpha\pi$. On construira D' et π' sur X_n par une méthode analogue à celle utilisée pour construire D et π sur ΛZ: (voir **[12]**, démonstration du Théorème 4.4). Les axiomes (E_1) et (E_2) sont bien vérifiés. Si λ'^* est l'isomorphisme: $H_0(\Lambda Y, d') \to H(\Lambda Y, D)$, la condition (E_2) implique que $\pi'^* = \rho'^*(\lambda'^*)^{-1}$, donc π'^* est un isomorphisme.

(2) *Unicité.* D'après le Théorème 2.2.1, il existe un isomorphisme ϕ: $(\Lambda Z, D) \to (\Lambda Z, \tilde{D})$ tel que ϕ − id fait décroitre la filtration, et un morphisme Φ: $(\Lambda Z, D)^I \to (A, d_A)$ tel que $\Phi(\lambda_0)_{\Lambda Z} = \pi$ et $\Phi(\lambda_1)_{\Lambda Z} = \tilde{\pi}\phi$.

On va construire un morphisme Φ': $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')^I \to (A', d_{A'})$ et un isomorphisme ϕ': $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X, \tilde{D}')$, par récurrence sur le degré inférieur. On posera sur Y_0: $\phi' = \mathrm{id}$, $\Phi' = \pi'$; sur $\overline{Z_0} \oplus D\overline{Z_0}$, on posera $\Phi' = \alpha\Phi$, et sur $\overline{X}_0 \oplus D\overline{X}_0$ on fera la construction du Théorème 4.4 de **[12]**. Plus généralement, on posera $\Phi' = \alpha\Phi$ sur $Z_n \oplus \overline{Z}_n \oplus D\overline{Z}_n$ et $\phi' = \phi$ sur Z_n, et on construira ϕ' sur X_n et Φ' sur $X_n \oplus \overline{X}_n \oplus D'\overline{X}_n$ selon la méthode de **[12]**. Il est facile de vérifier que $\Phi'(\lambda_0)_{\Lambda Z \otimes \Lambda X} = \pi'$ et $\Phi'(\lambda_1)_{\Lambda Z \otimes \Lambda X} = \tilde{\pi}'\phi'$. Par construction, on a $\Phi' i = \alpha\Phi$. Ceci achève la démonstration du théorème.

DÉFINITION 2.2.5. La K-S extension libre

$$(\Lambda Z, D) \xrightarrow{i} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \xrightarrow{p} (\Lambda X, D'')$$

vérifiant les conclusions du Théorème 2.2.4 s'appelle le modèle filtré de α.

3. Applications topologiques: modèle filtré d'une application continue.

DÉFINITION 2.3.1. Soient S et T deux espaces topologiques connexes par arcs et soit f une application continue $S \to T$. Le modèle filtré du morphisme $A(f)$: $A(T) \to A(S)$ s'appelle le modèle filtré de f (relativement au corps k de caractéristique 0 fixé).

DÉFINITION 2.3.2. Un espace topologique connexe S est dit formel (sur k) si le modèle minimal de $A(S)$ est égal au modèle minimal de $H^*(S, k)$.

On démontre, **[12]** ou **[17]**, que la notion de formalité est indépendante du corps de base. Sullivan démontre que tout espace nilpotent qui possède une structure d'espace riemannien symétrique compact orientable est formel (voir **[9]** ou **[12]**, **[17]**).

On remarque qu'un espace S est formel si et seulement si le modèle filtré de $A(S)$ est égal au modèle minimal bigradué de $H^*(S, k)$. Plus précisément si ρ: $(\Lambda Z, d) \to H^*(S, k)$ est le modèle minimal bigradué de $H^*(S, k)$, S est formel si et seulement si il existe un morphisme π: $(\Lambda Z, d) \to A(S)$ tel que $\pi^* = \rho^*$.

Soit S un espace formel, et soit m_S: $\Lambda X_S \to A(S)$ le modèle minimal de $A(S)$, il existe alors des morphismes d'ADGC ψ_S: $\Lambda X_S \to H^*(S, k)$ tel que $\psi_S^* = m_S^*$.

DÉFINITION 2.3.3. Soient S et T deux espaces topologiques connexes formels de modèles minimaux ΛX_S et ΛX_T. Soit f: $S \to T$ une application continue, elle induit un morphisme d'ADGC $\hat{f}$: $\Lambda X_T \to \Lambda X_S$. On dit que l'application f est formelle sur k si le diagramme suivant commute à homotopie près:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda X_T & \xrightarrow{\hat{f}} & \Lambda X_S \\ \psi_T \downarrow & & \downarrow \psi_S \\ H^*(T, k) & \xrightarrow{f^*} & H^*(S, k) \end{array}$$

(où ψ_S et ψ_T sont des morphismes définis plus haut).

Dans **[6]**, Deligne, Morgan, Griffiths et Sullivan montrent que les variétés kählériennes compactes simplement connexes sont formelles et que toute application holomorphe entre de telles variétés est formelle.

PROPOSITION 2.3.4. *Soient S et T deux espaces formels connexes par arcs et f une application continue $S \to T$. Alors l'application f est formelle sur k si et seulement si le modèle minimal bigradué de f^*: $H^*(T, k) \to H^*(S, k)$ est le modèle filtré de f.*

DÉMONSTRATION. Supposons que

$$\begin{array}{ccc} H^*(T, k) & \xrightarrow{f^*} & H^*(S, k) \\ \uparrow \rho & & \uparrow \rho' \\ (\Lambda Z, d) & \xrightarrow{i} & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \end{array}$$

soit le modèle minimal bigradué de f^* et que

$$\begin{array}{ccc} A(T) & \xrightarrow{A(f)} & A(S) \\ \pi \uparrow & & \uparrow \pi' \\ (\Lambda Z, d) & \xrightarrow{i} & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \end{array}$$

soit le modèle filtré de $A(f)$.

Soit m_s: $\Lambda X_S \to A(S)$ le modèle minimal de $A(S)$, il existe un quasi-isomorphisme d'ADGC θ': $\Lambda X_S \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d')$ tel que $\pi'\theta'$ est homotope à m_s, et il existe un morphisme θ: $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \to \Lambda X_S$ tel que $\theta'\theta$ est homotope à

$1_{\Lambda Z \otimes \Lambda X}$. On vérifie que $m_s(\theta i)$ est homotope à $A(f)\pi$, donc $A(f)$ induit le morphisme $\hat{f} = \theta i$ entre les modèles minimaux $(\Lambda Z, d)$ et ΛX_S. De plus $\rho'\theta'$: $\Lambda X_S \to H^*(S, k)$ est tel que $(\rho'\theta')^* = m_s^*$. On montre enfin que $f^*\rho$ est homotope à $\rho'\theta'\hat{f} = \rho'\theta'\theta$, ce qui implique que f est formelle.

Réciproquement, supposons que f soit formelle. Soit

$$\begin{array}{ccc} H^*(T, k) & \xrightarrow{f^*} & H^*(S, k) \\ \rho\uparrow & & \uparrow\rho' \\ (\Lambda Z, d) & \to & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \end{array}$$

le modèle minimal bigradué de f^*, et soit

$$\begin{array}{ccc} A(T) & \xrightarrow{A(f)} & A(S) \\ \pi\uparrow & & \uparrow\pi' \\ (\Lambda Z, d) & \xrightarrow{i} & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \end{array}$$

le modèle filtré de f; avec $\pi^* = \rho^*$.

Comme f est formelle, il est facile de construire un morphisme d'ADGC, Ψ_S: $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \to H^*(S, k)$ tel que $\Psi_S^* = \pi'^*$ et tel que $\Psi_S i$ soit homotope à $f^*\rho$. Ceci veut dire (voir Définition 1.2) qu'il existe un morphisme d'ADGC Φ: $(\Lambda Z, d)^I \to H^*(S, k)$ tel que $\Phi(\lambda_0)_{\Lambda Z} = \Psi_S i$ et $\Phi(\lambda_1)_{\Lambda Z} = f^*\rho$. Il est alors aisé de construire un morphisme d'ADGC Φ': $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')^I \to H^*(S)$ tel que $\Phi' i^I = \Phi$ (où i^I est l'inclusion $(\Lambda Z, d)^I \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')^I$) et tel que $\Phi'(\lambda_0)_{\Lambda Z \otimes \Lambda X} = \Psi_S$. Si on pose $\Psi'_S = \Phi'(\lambda_1)_{\Lambda Z \otimes \Lambda X}$, on a alors $\Psi'_S i = \Phi'(\lambda_1)_{\Lambda Z \otimes \Lambda X} i = \Phi' i^I(\lambda_1)_{\Lambda Z} = \Phi(\lambda_1)_{\Lambda Z} = f^*\rho$. Par construction, Ψ_S et Ψ'_S sont homotopes, donc on a $\Psi_S'^* = \Psi_S^* = \pi'^*$. Ceci prouve que

$$\begin{array}{ccc} H^*(T) & \xrightarrow{f^*} & H^*(S) \\ \rho\uparrow & & \uparrow\Psi'_S \\ (\Lambda Z, d) & \to & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \end{array}$$

est le modèle filtré de f^*; et donc que $(\Lambda Z, d) \xrightarrow{i} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d')$ est le modèle filtré de f.

REMARQUE 2.3.5. Il est facile de construire des applications non formelles entre espaces formels. Par exemple, on montre que la fibration de Hopf $S^1 \to S^3 \xrightarrow{f} S^2$ n'est pas une application formelle: en effet, f est triviale en cohomologie et nontriviale en homotopie puisque son invariant de Hopf est égal à un.

CHAPITRE III. ETUDE DE LA RÉALISATION D'UN MORPHISME DONNÉ EN COHOMOLOGIE

1. Etude d'une obstruction à la réalisation. Dans ce paragraphe, on se donne deux ADGC (A, d_A) et $(A', d_{A'})$ qui sont des algèbres libres minimales c-connexes sur un corps k de caractéristique 0. On suppose fixé un morphisme d'algèbres graduées β: $H(A, d_A) \to H(A', d_{A'})$ injectif en degré 1; et on cherche s'il existe un morphisme d'ADGC α: $(A, d_A) \to (A', d_{A'})$ tel que $\alpha^* = \beta$.

On va exposer une théorie de l'obstruction nous disant sous quelles conditions β est réalisable. Les méthodes employées généralisent celles de Halperin-Stasheff, [**12**, Chapitre 5].

L'outil essentiel de cette étude est la théorie développée au Chapitre II.

On construit le modèle minimal bigradué du morphisme β

$$\begin{array}{ccc} H(A) & \xrightarrow{\beta} & H(A') \\ \rho\uparrow & & \uparrow\rho' \\ (\Lambda Z, d) & \rightarrow & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \end{array}$$

défini par le Théorème 2.1.3.

On construit ensuite le modèle filtré $(\Lambda Z, D) \xrightarrow{\pi} (A, d_A)$ de l'algèbre différentielle graduée (A, d_A).

Le morphisme d'ADGC ρ': $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \rightarrow H(A', d_{A'})$ satisfait aux hypothèses du Théorème 2.2.1, donc on peut construire un modèle filtré de $(A', d_{A'})$: $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \xrightarrow{\pi'} (A', d_{A'})$ vérifiant les conditions (E_1), (E_2), (E_3) du Théorème 2.2.1.

On se donne aussi des applications linéaires η: $H(A) \rightarrow \Lambda Z_0$ et η': $H(A') \rightarrow \Lambda Y_0$ telles que $\rho\eta = \mathrm{id}_{H(A)}$ et $\rho'\eta' = \mathrm{id}_{H(A')}$.

Dans toute la suite, on suppose fixés ces deux modèles filtrés de (A, d_A) et $(A', d_{A'})$ ainsi que les applications η et η'. On mettra toujours sur ΛZ et sur $\Lambda Z \otimes \Lambda X$ les filtrations définies au Chapitre II, §2.

Il est bien évident que, en général, $D'(\Lambda Z)$ n'est pas contenu dans ΛZ.

THÉORÈME 3.1.1. *β est réalisable si et seulement si il existe une différentielle $\bar{D}$ sur $\Lambda Z \otimes \Lambda X$ satisfaisant* (E_1), *telle que $\bar{D}|_{\Lambda Z} = D$ et s'il existe un isomorphisme d'ADGC ϕ: $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, \bar{D}) \rightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')$ tel que $\phi - \mathrm{id}$ soit décroissante pour la filtration (ϕ n'est pas ΛZ-linéaire).*

[Dans toute la suite, une application est dite décroissante pour la filtration si elle est strictement décroissante pour la filtration.]

DÉMONSTRATION. Si β est réalisable par α: $(A, d_A) \rightarrow (A', d_{A'})$; on sait construire, grâce au Théorème 2.2.4, un modèle filtré de α:

$$\begin{array}{ccc} (A, d_A) & \xrightarrow{\alpha} & (A', d_{A'}) \\ \pi\uparrow & & \uparrow\bar{\pi} \\ (\Lambda Z, D) & \xrightarrow{i} & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, \bar{D}) \end{array}$$

tel que le diagramme ci-dessus soit un diagramme commutatif de morphismes d'ADGC. En particulier, on a $\bar{D}|_{\Lambda Z} = D$.

Mais $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, \bar{D}) \xrightarrow{\bar{\pi}} (A', d_{A'})$ et $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \xrightarrow{\pi'} (A', d_{A'})$ sont deux modèles filtrés de $(A', d_{A'})$ vérifiant les conclusions du Théorème 2.2.1. Ce même théorème nous assure l'existence d'un isomorphisme ϕ: $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, \bar{D}) \rightarrow (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')$ tel que $\phi - \mathrm{id}$ soit décroissante pour la filtration et tel que $\pi'\phi$ soit homotope à $\bar{\pi}$.

Réciproquement, supposons qu'il existe une différentielle $\bar{D}$ sur $\Lambda Z \otimes \Lambda X$ vérifiant (E_1), telle que $\bar{D}|_{\Lambda Z} = D$, et supposons qu'il existe un isomorphisme ϕ: $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, \bar{D}) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')$ tel que ϕ-id soit décroissante pour la filtration. On a alors le diagramme suivant de morphismes d'ADGC:

$$(A, d_A) \xleftarrow{\pi} (\Lambda Z, D) \xrightarrow{i} \left(\Lambda Z \otimes \Lambda X, \bar{D}\right) \xrightarrow{\phi} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \xrightarrow{\pi'} (A', d_{A'}).$$

Comme (A, d_A) est une algèbre libre, on peut construire un morphisme $\tilde{\pi}$: $(A, d_A) \to (\Lambda Z, D)$ tel que $\pi\tilde{\pi}$ soit homotope à l'identité. On montre alors que $\alpha = \pi'\phi i\tilde{\pi}$ est un réalisation de β, en vérifiant que $\alpha^* = \pi'^*\phi^* i^*(\pi^*)^{-1} = \beta$.

Nous sommes alors amenés à poser la définition suivante:

DÉFINITION 3.1.2. Le morphisme β: $H(A, d_A) \to H(A', d_{A'})$ est dit n-réalisable ($n \geqslant 0$) s'il existe une différentielle $\bar{D}$ sur $(\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(n)}$ satisfaisant (E_1), telle que $\bar{D}|_{\Lambda Z_{(n)}} = D$ et s'il existe un isomorphisme

$$\phi \colon \left((\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(n)}, \bar{D}\right) \to \left((\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(n)}, D'\right)$$

tel que ϕ − id soit décroissante pour la filtration.

Un tel couple $(\bar{D}, \phi)$ s'appelle une n-réalisation de β.

Si $(\bar{D}, \phi)$ est une n-réalisation de β, on définit une application linéaire de degré 1 par

$$O_{n+1}(\bar{D}, \phi)(z) = \left[\pi'\phi D z\right] \quad \text{si } z \in Z_{n+1};$$

([ ] désigne la classe de l'élément dans $H(A')$.)

Alors $O_{n+1}(\bar{D}, \phi)$ est un élément de $\mathrm{Hom}^1(Z_{n+1}, H(A'))$ et s'appelle l'obstruction définie par le couple $(\bar{D}, \phi)$.

REMARQUE 3.1.3. Le morphisme β est toujours 1-réalisable par la différentielle $\bar{D} = d' = D'$ et le morphisme $\phi = \mathrm{id}|_{(\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(1)}}$.

La première question qui se pose alors est de savoir si une n-réalisation se prolonge en une n + 1-réalisation.

THÉORÈME 3.1.4. *Une n-réalisation $(\bar{D}, \phi)$ se prolonge en une $(n + 1)$-réalisation si et seulement si $O_{n+1}(\bar{D}, \phi) = 0$.*

DÉMONSTRATION. Si $(\bar{D}, \phi)$ se prolonge en une $(n + 1)$-réalisation notée encore $(\bar{D}, \phi)$, alors, pour tout $z \in Z_{n+1}$, on a

$$\left[\pi'\phi D z\right] = \left[\pi' D'\phi z\right] = 0.$$

Réciproquement, supposons que $O_{n+1}(\bar{D}, \phi) = 0$. Nous voulons d'abord prolonger $\bar{D}$ et ϕ à Z_{n+1}. Si $z \in Z_{n+1}$, on a $Dz \in F^{-(n)}(\Lambda Z)$, et $\phi(Dz) - D'z \in F^{-(n-1)}(\Lambda Y) \cap \mathrm{Ker}\, D'$. D'après le Lemme 2.2.2, il existe $w \in F^{-n}(\Lambda Y)$ et $\alpha' \in H(A')$ tels que $\phi(Dz) = D'(z + w) + \eta'(\alpha')$.

Comme $O_{n+1}(\bar{D}, \phi)(z) = 0$, on a: $0 = [\pi' D'(z + w)] + \alpha' = \alpha'$.

On pose alors $\phi(z) = z + w$, on définit ainsi une application linéaire ϕ, en choisissant w dépendant linéairement de z. Par construction, on a

$$(\phi - \mathrm{id})(Z_{n+1}) \in F^{-n}(\Lambda Y) \quad \text{et} \quad \phi(Dz) = D'\phi(z) \quad \text{si } z \in Z_{n+1}.$$

Il reste à prolonger $\bar{D}$ et ϕ à X_{n+1}. Soit $x \in X_{n+1}$, alors $\bar{D}\, dx \in F^{-(n-2)}(\Lambda Y) \cap \mathrm{Ker}\, \bar{D}$; d'après le Lemme 2.2.2, il existe $v \in F^{-(n-1)}(\Lambda Y)$ et il existe $\alpha' \in H(A')$

tels que

$$\bar{D}dx = \bar{D}v + \eta'(\alpha').$$

On a alors $D'\phi(dx) = \phi(\bar{D}\,dx) = D'\phi(v) + \eta'(\alpha')$ d'où

$$0 = [\pi' D'\phi(dx)] = \alpha';$$

Ceci implique que $\bar{D}(dx - v) = 0$.

Posons alors $\bar{D}x = dx - v - \eta'([\pi'\phi(dx - v)])$. Alors on a $[\pi'\phi\bar{D}x] = 0$, et on peut prolonger ϕ à X_{n+1} par la méthode précédente. On étend alors $(\bar{D}, \phi)$ à $\Lambda Y_{(n+1)}$; par construction, c'est une $(n+1)$-réalisation de β.

THÉORÈME 3.1.5. *Soit un morphisme β: $H(A) \to H(A')$. Supposons qu'il existe un entier $l \geqslant 1$ tel que*

$$H^p(A) = 0, \quad 1 \leqslant p \leqslant l, \qquad \textit{et} \qquad H^p(A') = 0, \quad p > 3l + 1.$$

Alors β est réalisable.

On verra des exemples d'application de ce théorème aux paragraphes suivants.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.1.5. D'après la Remarque 3.8.4 de **[12]**, on a $Z_n^p = 0$, $1 \leqslant p \leqslant (n+1)l$, puisque $H^p(A) = 0$ pour $1 \leqslant p \leqslant l$.

Soit $(\bar{D}, \phi)$ une 1-réalisation quelconque, alors $O_2(\bar{D}, \phi) \in \mathrm{Hom}^1(Z_2, H(A'))$ et $Z_2^p = 0$ pour $1 \leqslant p \leqslant 3l$. Donc si $z \in Z_2^p$ et $p \leqslant 3l$, on a alors $O_2(\bar{D}, \phi)(z) = 0$; de plus si $z \in Z_2^p$ et $p \geqslant 3l + 1$, alors $O_2(\bar{D}, \phi)(z)$ est un élément de $H^{p+1}(A')$, donc $O_2(\bar{D}, \phi)(z) = 0$ d'après l'hypothèse sur $H^*(A')$. Ceci prouve que $O_2(\bar{D}, \phi) = 0$, donc $(\bar{D}, \phi)$ se prolonge en une 2-réalisation de β.

En itérant cette démonstration, on construit une suite $(\bar{D}_n, \phi_n)$ où $(\bar{D}_n, \phi_n)$ est une n-réalisation prolongeant $(\bar{D}_{n-1}, \phi_{n-1})$.

On définit alors une différentielle $\bar{D}$ sur $\Lambda Z \otimes \Lambda X$ satisfaisant E_1 et telle que $\bar{D}|_{\Lambda Z} = D$, et on définit un morphisme ϕ: $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, \bar{D}) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')$ tel que $\phi - \mathrm{id}$ soit décroissante pour la filtration de la manière suivante:

si $u \in (\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(n)}$, on pose $\bar{D}u = \bar{D}_n u$ et $\phi(u) = \phi_n(u)$.

Le Théorème 3.1.1 montre que β est réalisable.

REMARQUE. Comme me l'a suggéré H. J. Baues, on pourrait donner une autre preuve de ce théorème en utilisant les résultats de **[1]**.

La seconde question qui se pose dans un problème de ce type est la suivante: soit $(\bar{D}, \phi)$ une n-réalisation de β qui ne se prolonge pas en une $n+1$-réalisation, existe-t-il une autre n-réalisation qui va se prolonger?

Cela nous amène à comparer deux n-réalisations et les deux obstructions qui leur sont associées.

Notation. $O_n(\beta) = \{O_n(\bar{D}, \phi) | (\bar{D}, \phi)$ est une $(n-1)$-réalisation de $\beta\}$.

Par définition, une 1-réalisation est un automorphisme ϕ de l'ADGC $[(\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(1)}, d']$ tel que $\phi - \mathrm{id}$ soit décroissante pour la filtration.

Soit M_1 l'espace vectoriel des k-dérivations de degré 0 définies sur $(\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(1)}$ strictement décroissantes pour la filtration.

Si ϕ est une 1-réalisation, on définit $\theta = \log \phi$ par la formule

$$\log \phi(u) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} (\phi - \mathrm{id})^p(u),$$

pour tout $u \in (\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(1)}$ (la somme est toujours finie et a donc un sens). On vérifie facilement que $\theta = \log \phi$ est un élément de M_1.

Réciproquement, soit $\theta \in M_1$ et posons $\phi = e^\theta$ où e^θ est défini par

$$e^\theta(u) = \sum_{p>0} \frac{1}{p!}\, \theta^p(u)$$

pour tout $u \in (\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(1)}$. Alors ϕ est un automorphisme de l'ADGC $((\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(1)}, d')$ tel que $\phi - \mathrm{id}$ soit décroissante pour la filtration.

Il est facile de vérifier que $e^{\log \phi} = \phi$ et $\log e^\theta = \theta$, ce qui prouve que les 1-réalisations de β sont les automorphismes e^θ, où $\theta \in M_1$.

Définissons alors une application linéaire γ: $M_1 \to \mathrm{Hom}^1(Z_2, H(A'))$ par $\gamma(\theta)(z) = [\pi'\theta D'z] = [\pi'\theta\, dz]$ si $z \in Z_2$.

On peut alors énoncer les résultats suivants:

PROPOSITION 3.1.6. $O_2(d', e^\theta) = O_2(d', \mathrm{id}) + \gamma(\theta)$.

COROLLAIRE 3.1.7. *Le morphisme β est 2-réalisable si et seulement si $O_2(\beta) = \gamma(M_1)$.*

REMARQUE. Si on regarde l'image $\overline{O_2(\beta)}$ de $O_2(\beta)$ dans l'espace vectoriel quotient $\mathrm{Hom}^1(Z_2, H(A'))/\gamma(M_1)$, alors β est 2-réalisable si et seulement si $\overline{O_2(\beta)} = 0$.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE. Si β est 2-réalisable, il existe une 2-réalisation $(\overline{D}_0, \phi_0)$ de β; alors $\phi_0|_{\Lambda Y_{(1)}}$ est de la forme e^{θ_0} et on a $O_2(d', e^{\theta_0}) = 0$. La Proposition 3.1.6 montre que $O_2(d', \mathrm{id}) = -\gamma(\theta_0) = \gamma(-\theta_0)$.

Si (d', ϕ) est une 1-réalisation de β, alors il existe $\theta \in M_1$ tel que $\phi = e^\theta$ et $O_2(d', \phi) = \gamma(\theta) - \gamma(\theta_0) = \gamma(\theta - \theta_0)$. Ceci implique que $O_2(\beta) = \gamma(M_1)$.

Réciproquement si $O_2(\beta) = \gamma(M_1)$, il existe une 1-réalisation (d', ϕ) tel que $O_2(\phi) = \gamma(0) = 0$; par suite (d', ϕ) se prolonge en une 2-réalisation, d'après le Théorème 3.1.4.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION. On a

$$O_2(e^\theta) = [\pi' e^\theta Dz] \quad \text{et} \quad O_2(\mathrm{id}) = [\pi' Dz]$$

d'ou

$$O_2(e^\theta) - O_2(\mathrm{id}) = [\pi'(e^\theta - \mathrm{id})(Dz)].$$

$Dz \in F^{-1}(\Lambda Z)$, donc

$$(e^\theta - \mathrm{id})(Dz) = \theta(Dz) + \sum_{p>2} \frac{\theta^{p-1}}{p!}\theta\, Dz.$$

Or $\theta Dz \in \Lambda Z_0 \otimes \Lambda X_0$, donc on a

$$\sum_{p>2} \frac{\theta^{p-1}}{p!}\theta\, Dz = 0.$$

On en déduit immédiatement la formule.

THÉORÈME 3.1.8. *Soit β un morphisme $H(A) \to H(A')$. Supposons qu'il existe un entier $l \geq 1$ tel que*

$$H^p(A) = 0, \quad 1 \leq p \leq l, \qquad et \qquad H^p(A') = 0, \quad p > 4l + 1.$$

Alors β est réalisable si et seulement si $\overline{O_2(\beta)} = 0$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.1.8. Si β est réalisable, alors β est 2-réalisable, et par suite on a $\overline{O_2(\beta)} = 0$ d'après le Corollaire 3.1.7.

Réciproquement, si $\overline{O_2(\beta)} = 0$, alors il existe une 2-réalisation $(\overline{D}, \phi)$ de β d'après le Corollaire 3.1.7. Cette 2-réalisation définit une obstruction $O_3(\overline{D}, \phi) \in \mathrm{Hom}^1(Z_3, H(A'))$.

Par hypothèse, on a $H^p(A) = 0$ si $p \leq l$; on a vu que ceci entraîne que $Z_3^p = 0$ si $p \leq 4l$. Donc si $z \in Z_3^p$ et $p \leq 4l$, alors on a $O_3(\overline{D}, \phi)(z) = 0$. Si $z \in Z_3^p$ et $p > 4l$, alors $O_3(D, \phi)(z) \in H^{p+1}(A')$, mais, par hypothèse, on a $H^{p+1}(A') = 0$ si $p > 4l$, donc $O_3(\overline{D}, \phi)(z) = 0$ pour tout $z \in Z_3$. On termine alors la démonstration par la même méthode que celle utilisée dans la démonstration du Théorème 3.1.5.

Nous allons voir maintenant que le problème se complique lorsque nous voulons prolonger des 2-réalisations.

On se fixe une 2-réalisation $(\overline{D}, \phi)$ de β, et on définit l'espace vectoriel M_2 des k-dérivations θ de $\Lambda Z \otimes \Lambda X_{(2)}$ de degré 0 strictement décroissantes pour la filtration et telles que $D'\theta = \theta D'$ sur $\phi(\Lambda Z_{(2)})$.

On vérifie que M_2 est l'espace des k-dérivations θ de $(\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(2)}$ de degré 0 strictement décroissantes pour la filtration et telles que $d'\theta = \theta d'$ sur Z_2. On a:

PROPOSITION 3.1.9. *Si $(\overline{D}, \phi)$ est une 2-réalisation de β, alors toutes les 2-réalisations sont de la forme $e^\theta\phi$ où $\theta \in M_2$.*

La preuve est laissée au lecteur.

On définit une application non linéaire γ: $M_2 \to \mathrm{Hom}^1(Z_3, H(A'))$ par $\gamma(\theta) = \{z \mapsto [\pi'(e^\theta - \mathrm{id})\phi Dz]\}$.

On vérifie que: $\gamma(\theta)(z) = [\pi'\theta\phi Dz] + \frac{1}{2}\rho'(\theta^2\, dz)$.

PROPOSITION 3.1.10. *$O_3(e^\theta\phi) = O_3(\overline{D}, \phi) + \gamma(\theta)$, si $\theta \in M_2$ et si $(\overline{D}, \phi)$ est une 2-réalisation de β.*

COROLLAIRE 3.1.11. *$O_3(\beta) = O_3(\overline{D}, \phi) + \gamma(M_2)$, où $(\overline{D}, \phi)$ est une 2-réalisation fixée de β.*

2. Dépendance du corps de base.

THÉORÈME 3.2.1. *Soient (A, d_A) et $(A', d_{A'})$ deux ADGC minimales c-connexes sur un corps k et soit β un morphisme $H(A, d_A) \to H(A', d_{A'})$. Supposons qu'il existe un entier $l \geq 1$ tel que $H^p(A, d_A) = 0$, $1 \leq p \leq l$, et $H^p(A', d_{A'}) = 0$ $p > 4l + 1$. Soit K un corps contenant k. Si $\beta \otimes \mathbf{1}_K$ est réalisable, alors β est réalisable.*

Compte-tenu du Théorème 3.1.8 et de la Proposition 3.1.6, la démonstration de ce théorème est analogue à celle du Théorème 6.8 de **[12]**.

On va exhiber des exemples montrant que la réalisation dépend du corps de base. On va construire des $\mathbf{Q}$ − ADGC (A, d_A) et $(A', d_{A'})$ et un morphisme β: $H(A, d_A) \to H(A', d_{A'})$ tels que la réalisation de $\beta \otimes \mathbf{1}_K$ (où K est un corps contenant $\mathbf{Q}$) est équivalente à la résolution d'une équation polynômiale du second degré à coefficients rationnels.

EXEMPLE 3.2.2. *Soit $H = \Lambda(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ la $\mathbf{Q}$-algèbre graduée quotient de l'algèbre libre $\Lambda(x_1, x_2, x_3)$ par l'idéal engendré par x_1^2, x_1x_2, x_3^3 où* $|x_1| = 12$, $|x_2| = 15$, $|x_3| = 26$.

On définit le morphisme β: $H \to H$ par: $\beta(\bar{x}_1) = 0$, $\beta(\bar{x}_2) = 0$, $\beta(\bar{x}_3) = \bar{x}_3$.

On remarque que $H^p = 0$ si $1 \leqslant p \leqslant l$ et $p > 6l + 1$, avec $l = 11$. On montre alors (cf. Théorème 3.1.8) que, si (A, d_A) et $(A', d_{A'})$ sont des $\mathbf{Q}$-ADGC de cohomologie H, et si $K \supset \mathbf{Q}$, le morphisme $\beta \otimes \mathbf{1}_K$ est réalisable si et seulement si il est 4-réalisable.

On construit d'abord le modèle minimal bigradué de β:

$$\begin{array}{ccc} H & \to & H' \\ \uparrow\rho & & \rho'\uparrow \\ (\Lambda Z, d) & \hookrightarrow & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \end{array}$$

Z_0 est engendré par x_1, $|x_1| = 12$, x_2, $|x_2| = 15$, x_3, $|x_3| = 26$.

Z_1 est engendré par y_1, $dy_1 = x_1^2$, y_2, $dy_2 = x_1x_2$, y_3, $dy_3 = x_3^3$.

Z_2 est engendré par z_1, $dz_1 = x_2y_1 + x_1y_2$, z_2, $dz_2 = x_2y_2$.

Z_3 est engendré par u_1, $du_1 = x_1z_1 - y_1y_2$, u_2, $du_2 = x_2z_1 + \frac{1}{2}y_2^2$, u_3, $du_3 = x_1z_2 - \frac{1}{2}y_2^2$, u_4, $du_4 = x_2z_2$.

X_0 est engendré par x_1', $|x_1'| = 12$, $\rho'(x_1') = \bar{x}_1$ et x_2', $|x_2'| = 15$, $\rho'(x_2') = \bar{x}_2$.

X_1 est engendré par t_0, $d't_0 = x_1$, t_0', $d't_0' = x_2$, t_1, $d't_1 = x_1'^2$, t_2, $d't_2 = x_1'x_2'$.

On montre ensuite que toutes les différentielles D et D' (perturbations suivant (E_1) de d et d') que l'on peut mettre sur Z_2 pour que β soit 2-réalisable sont de la forme

$$\begin{aligned} Dz_1 &= dz_1 + a_1x_1x_3, & D'z_1 &= dz_1 + a_1'x_1x_3, \\ Dz_2 &= dz_2 + a_2x_2x_3, & D'z_2 &= dz_2 + a_2'x_2x_3, \qquad \text{où } a_i, a_i' \in \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

Alors l'identité sur $(\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(1)}$ se prolonge en un morphisme

$$\phi\colon \big((\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(2)}, \bar{D}\big) \to ((\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(2)}, D')$$

où $\bar{D} = \phi^{-1}D'\phi$, et ϕ est donné par

$$\phi(z_1) = z_1 + (a_1 - a_1')t_0x_3, \qquad \phi(z_2) = z_2 + (a_2 - a_2')t_0'x_3.$$

Ainsi (D, ϕ) est une 2-réalisation de β.

Les dérivations θ de M_2 sont données par: $\theta(y_1) = 0$, $\theta(y_2) = \lambda x_3$, $\theta(z_1) = \lambda t_0x_3$, $\theta(z_2) = \lambda t_0'x_3$, où λ parcourt $\mathbf{Q}$. On n'explicite pas θ sur les autres générateurs de $(\Lambda Z \otimes \Lambda X)_{(2)}$.

On établit alors les formules donnant toutes les différentielles possibles D et D' que l'on peut mettre sur Z_3. On a

$$
\begin{aligned}
Du_2 &= du_2 + a_1 y_2 x_3 + b_2 x_3^2,\\
D'u_2 &= du_2 + a_1' t_0' x_1 x_3 + b_2' x_3^2 + b_1'(y_2 - t_0' x_1) x_3 + D'v,\\
Du_3 &= du_3 - a_2 y_2 x_3 + c_2 x_3^2,\\
D'u_3 &= du_3 - a_2' t_0' x_1 x_3 + c_2' x_3^2 + c_1'(y_2 - t_0' x_1) x_3 + D'w
\end{aligned}
$$

où b_2, c_2, b_2', c_2', b_1', c_1' sont des rationnels.

On utilise les méthodes de la Proposition 3.1.10, et on montre que $\beta \otimes \mathbf{1}_K$ est 3-réalisable si et seulement si il existe $\lambda \in K$ vérifiant $\frac{1}{2}\lambda^2 + a_1\lambda + (b_2 - b_2') = 0$ et $\frac{1}{2}\lambda^2 + a_2\lambda - (c_2 - c_2') = 0$.

Choisissons maintenant D et D' de manière que: $a_1 = a_2$ et $c_2 - c_2' = -(b_2 - b_2')$. La 3-résolution de $\beta \otimes \mathbf{1}_K$ est donc équivalente à la résolution dans K de l'équation: $\frac{1}{2}\lambda^2 + a_1\lambda + (b_2 - b_2') = 0$.

Il nous reste enfin à remarquer que, pour des raisons de degrés, pour tout K, la 3-réalisation de $\beta \otimes \mathbf{1}_K$ est équivalente à sa réalisation.

En corollaire, on peut montrer qu'il y a plusieurs types d'homotopie rationnelle de cohomologie H, et qu'il y a plusieurs types d'homotopie réelle de cohomologie $H \otimes \mathbf{R}$. (Il suffit pour cela de prendre pour ADGC (A, d_A) l'algèbre formelle $(\Lambda Z, d)$ modèle de H, et de choisir $c_2' = -b_2'$ de manière que $\frac{1}{2}\lambda^2 + c_2' = 0$ n'ait pas de solution.)

On peut aussi choisir $(A', d_{A'}) = (A, d_A)$ et exhiber des endomorphismes f: $H(A, d_A) \to H(A', d_{A'})$ dont la réalisabilité dépend du corps de base.

3. Exemples.

EXEMPLE 3.3.1. *Morphisme non réalisable.* Soit $T = (S^2 V S^2) \times S^3$, on a

$$H^*(T, \mathbf{Q}) = \Lambda(x_1, x_2, x_3)/\left(x_1^2, x_1 x_2, x_2^2\right) = \Lambda(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$$

où $|x_1| = |x_2| = 2$, $|x_3| = 3$.

Il a été démontré dans l'Exemple 6.5 de **[12]**, qu'il existe deux types d'homotopie rationnelle ayant une cohomologie isomorphe à $H = H^*(T, \mathbf{Q})$. On prendra, pour espace S, l'espace non formel de cohomologie H.

Considérons le morphisme β: $H \to H$ défini par $\beta(\bar{x}_1) = \bar{x}_1$, $\beta(\bar{x}_2) = \bar{x}_2$, $\beta(\bar{x}_3) = 0$.

On a $H^1(T, \mathbf{Q}) = 0$ et $H^p(S, \mathbf{Q}) = 0$ si $p > 5$. D'après le Théorème 3.1.5, β est réalisable si et seulement si $\overline{O_2(\beta)} = 0$.

Il est facile de vérifier que le modèle minimal bigradué de β est

$$
\begin{array}{ccc}
H & \xrightarrow{\beta} & H \\
\rho\uparrow & & \uparrow\rho' \\
(\Lambda Z, d) & \to & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d')
\end{array}
$$

où Z_0 est engendré par x_1, x_2, x_3, Z_1 est engendré par y_1, y_2, y_3, Z_2 est engendré par z_1, z_2 et d est donné dans **[12]**, X_0 est engendré par u, $|u| = 3$, $\rho'(u) = \bar{x}_3$, X_1 est engendré par v, $|v| = 2$, $dv = x_3$.

Le modèle filtré de T est égal au modèle minimal bigradué, car T est formel.

Un modèle filtré de S est de la forme $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')$ où

$$D'z_i = dz_i + \alpha_i x_1 x_3 + \beta_i x_2 x_3 + \alpha_i' x_1 u + \beta_i' x_2 u \quad \text{pour } i = 1, 2; \qquad (*)$$

et $\alpha_i \in \mathbf{Q}$, $\beta_i \in \mathbf{Q}$, $\alpha_i' \in \mathbf{Q}$, $\beta_i' \in \mathbf{Q}$.

Une dérivation $\theta \in M_1$ est définie par la donnée des images des éléments y_1, y_2, y_3, v. Pour des raisons de degrés, on a $\theta(y_i) = \lambda_i x_3 + \lambda_i' u$ où λ_i et λ_i' parcourt $\mathbf{Q}$ pour $i = 1, 2, 3$.

On a donc

$$\gamma(\theta)(z_1) = \lambda_1' \bar{x}_2 \bar{x}_3 - \lambda_3' \bar{x}_1 \bar{x}_3,$$
$$\gamma(\theta)(z_2) = \lambda_2' \bar{x}_1 \bar{x}_3 - \lambda_3' \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

Calculons maintenant

$$O_2(\mathrm{id})(z_i) = [\pi' Dz] = [\pi' dz], \qquad z \in Z_2.$$
$$O_2(\mathrm{id})(z_i) = [\pi'(D'z_i - \alpha_i x_1 x_3 - \beta_i x_2 x_3 - \alpha_i' x_1 u - \beta_i' x_2 u)] \quad \text{pour } i = 1, 2.$$
$$O_2(\mathrm{id})(z_i) = -\alpha_i' \bar{x}_1 \bar{x}_3 - \beta_i' \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

D'après le Théorème 3.1.8, β est réalisable si et seulement si il existe $\theta \in M_1$ tel que $O_2(\mathrm{id}) = \gamma(\theta)$.

Par suite, β est réalisable si et seulement si il existe des scalaires (λ_i, λ_i'), $i = 1, 2, 3$, tels que

$$-\lambda_3' = -\alpha_1', \qquad \lambda_1' = -\beta_1',$$
$$\lambda_2' = -\alpha_2', \qquad -\lambda_3' = -\beta_2',$$

β est donc réalisable si et seulement si $\alpha_1' = \beta_2'$.

Définissons alors une algèbre filtrée $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')$ en imposant que $D' - d'$: $Y_n \to F^{-(n-2)}(\Lambda Y)$, et $D'z_i$ vérifie la formule $(*)$ pour $i = 1, 2$, avec $\alpha_1' \neq \beta_2'$;

Cette algèbre filtrée a nécessairement le même type d'homotopie que S et les calculs montrent que β n'est pas réalisable.

EXEMPLE 3.3.2. *Morphisme réalisable*. Soit $T = S^5 V S^5$, on a $H^*(T, \mathbf{Q}) = \Lambda(z_1, z_2)/(z_1 z_2) = \Lambda(z_1^-, z_2^-)$ où $|z_1| = |z_2| = 5$.

L'espace S est le sous-espace de l'espace tangent $T(S^2 \times S^2)$ formé des vecteurs unitaires. On a un fibré: $S^3 \to S \to S^2 \times S^2$ non trivial, ce qui nous permet de calculer facilement le modèle minimal de S. On a $(\Lambda X_S, d_s) = (\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3), d_s)$ avec $|x_1| = |x_2| = 2$; $|y_i| = 3$, $i = 1, 2, 3$; $d_s x_i = 0$, $d_s y_1 = x_1^2$, $d_s y_2 = x_2^2$, $d_s y_3 = x_1 x_2$.

Alors $H^*(S, \mathbf{Q}) = \Lambda(x_1, x_2, u_1, u_2)/I$ où I est un idéal contenant $u_1 u_2$; et $|u_1| = |u_2| = 5$.

On définit le morphisme β: $H^*(T, \mathbf{Q}) \to H^*(S, \mathbf{Q})$ par $\beta(z_i^-) = u_i$, $i = 1, 2$.

On a $H^p(T, \mathbf{Q}) = 0$, $1 \leqslant p \leqslant 4$ et $H^p(S, \mathbf{Q}) = 0, p > 7$.

Le Théorème 3.1.5 prouve qu'il existe une application continue f: $S_{\mathbf{Q}} \to (S^5 V S^5)_{\mathbf{Q}}$ telle que $f^* = \beta$; bien que S ne soit pas formel.

CHAPITRE IV. LA SUITE SPECTRALE D'EILENBERG-MOORE

1. Étude d'une suite spectrale définie sur un produit tensoriel d'ADGC. Soient (A, d_A), $(A', d_{A'})$ et (C, d_c) trois algèbres différentielles graduées c-connexes, et soient $\alpha\colon (A, d_A) \to (A', d_{A'})$, $\gamma\colon (A, d_A) \to (C, d_c)$ des morphismes d'ADGC. On suppose que α^* est injectif en degré 1.

Soit

$$\begin{array}{ccccc} H(A) & \xrightarrow{\alpha^*} & H(A') & & \\ \rho\uparrow & & \uparrow\rho' & & \\ (\Lambda Z, d) & \xhookrightarrow{i} & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') & \xrightarrow{p} & (\Lambda X, d'') \end{array}$$

le modèle minimal bigradué de α^*, et soit

$$\begin{array}{ccccc} (A, d_A) & \xrightarrow{\alpha} & (A', d_{A'}) & & \\ \pi\uparrow & & \uparrow\pi' & & \\ (\Lambda Z, D) & \xhookrightarrow{i} & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') & \xrightarrow{p} & (\Lambda X, D'') \end{array}$$

le modèle filtré de α.

Le $(\Lambda Z, D)$-produit tensoriel des ADGC (C, d_c) et $(\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')$, noté $(C, d_c) \otimes_{(\Lambda Z, D)} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D')$ est isomorphe à $(C \otimes_k \Lambda X, \Delta')$.

Si $c \in C$, $v \in \Lambda X$ et

$$D'(1 \otimes v) = 1 \otimes D''v + \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes v_i$$

avec $a_i \in \Lambda^+ Z$, $v_i \in \Lambda X$ pour $i = 1, \ldots, n$, on a

$$\Delta'(c \otimes v) = d_c(c) \otimes v + (-1)^{|c|}\Big[c \otimes D''v + \sum c\gamma\pi(a_i) \otimes v_i\Big].$$

On définit une bigraduation sur $C \otimes_k \Lambda X$ par

$$(C \otimes \Lambda X)^{-n,q} = [C \otimes (\Lambda X)_n]^{q-n}$$

et une filtration décroissante par

$$F^{-p}(C \otimes \Lambda X) = \sum_{-n \geq -p} (C \otimes \Lambda X)^{-n,*} = \sum_{n < p} C \otimes (\Lambda X)_n \quad \text{si } p \geq 0,$$

$$F^{+1} = 0.$$

On remarque que Δ' préserve la filtration et augmente le degré total de $C \otimes \Lambda X$ (égal au degré supérieur) de $+1$. Cette filtration définit une suite spectrale (E_i, d_i) de k-algèbres située dans le second quadrant.

THÉORÈME 4.1.1. *La suite spectrale* (E_i, d_i) *a les propriétés suivantes*:

(1) $E_0^{-p,q} = (C \otimes (\Lambda X)_p)^{q-p}$ *et* $d_0 = d_c \otimes 1$.

(2) $E_1^{-p} = H^*(C) \otimes_k (\Lambda X)_p$.

L'isomorphisme défini par: $\Phi(c \otimes u \otimes v) = c\gamma^*\rho(u) \otimes v$ (*où* $c \in H^*(c)$, $u \in \Lambda Z$, $v \in \Lambda X$) *entre* $((H^*(C), 0) \otimes_{(\Lambda Z, d)} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d'), \bar{d})$ *et* $H^*(C) \otimes \Lambda X$ *détermine une différentielle* $\delta' = \Phi\bar{d}\Phi^{-1}$ *sur* $H^*(C) \otimes_k \Lambda X$, *et on a* $d_1 = \delta'$.

(3) $\varinjlim E_r = E_\infty = \operatorname{Gr} H^*(C \otimes \Lambda X, \Delta')$.

DÉMONSTRATION. Si $v \in (\Lambda X)_p$, on peut décomposer $D'v$:

$$D'v = 1 \otimes d''v + 1 \otimes v' + \sum_{i=1}^{n} a_i' \otimes v_i' + \sum a_i'' \otimes v_i'' + \sum a_i''' \otimes v_i'''$$

où $v' \in \Sigma_{n \leqslant p-2} (\Lambda X)_n$, $a'_i \in \Lambda^+ Z_0$, $v'_i \in (\Lambda X)_{p-1}$,

$$\sum a''_i \otimes v''_i \in \sum_{j=1}^{p-1} (\Lambda^+ Z)_j \otimes (\Lambda X)_{p-1-j}, \ \sum a'''_i \otimes v'''_i \in \sum_{n < p-2} (\Lambda^+ Z \otimes \Lambda X)_n.$$

On a $d'v = 1 \otimes d''v + \sum a'_i \otimes v'_i + \sum a''_i \otimes v''_i$.

$$\begin{aligned}\Delta'(c \otimes v) &= d_c(c) \otimes v + (-1)^{|c|}[c \otimes d''v + c \otimes v'] \\ &\quad + (-1)^{|c|}\Big[\sum \gamma\pi(a'_i) \otimes v'_i + \sum c\gamma\pi(a''_i) \otimes v''_i + \sum c\gamma\pi(a'''_i) \otimes v'''_i\Big].\end{aligned}$$

De là, on déduit facilement le théorème.

Théorème 4.1.2. *Soient (A, d_A) et $(A', d_{A'})$ deux ADGC c-connexes sur un corps k et α un morphisme $(A, d_A) \to (A', d_{A'})$ tel que α^{*1} soit injectif. Soit $(\Lambda Z, d) \overset{i}{\hookrightarrow} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \overset{p}{\to} (\Lambda X, d'')$ le modèle minimal bigradué de α^*, et soit*

$$\begin{array}{ccccc} (A, d_A) & \overset{\alpha}{\to} & (A', d_{A'}) & & \\ \pi\uparrow & & \uparrow\pi' & & \\ (\Lambda Z, D) & \overset{i}{\to} & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') & \overset{p}{\to} & (\Lambda X, D'') \end{array}$$

le modèle filtré de α.

La filtration décroissante $F^{-p}(\Lambda X) = \Sigma_{n<p} (\Lambda X)_n$ si $p \geqslant 0$, $F^{+1} = 0$ définit sur $(\Lambda X, D'')$ une suite spectrale d'ADGC telle que:

(1) $E_2^{-p,q} = H_p^{q-p}(\Lambda X, d'')$.

(2) $\varinjlim E_r = H^*(\Lambda X, D'')$.

La démonstration est analogue à celle du Théorème 4.1.1.

Remarque. Des théorèmes d'isomorphie entre deux modèles filtrés d'une même application, il résulte que la définition de la suite spectrale est indépendante du modèle filtré choisi pour la construire.

2. Lien avec la suite spectrale d'Eilenberg-Moore. On fixe un corps k de caractéristique 0.

Dans **[16]** ou **[18]**, on trouvera la définition de résolution projective propre d'un Λ-module différentiel gradué à gauche M où Λ est une k-algèbre différentielle graduée connexe (pas nécessairement commutative). Si $\ldots \to M^{n-1} \to M^n \to \cdots \to M^0 \to M \to 0$ est une telle résolution indexée par les entiers négatifs, on considère le Λ-module différentiel gradué $D(M) = \bigoplus_{n,q} M^{n,q}$ muni de la différentielle totale. Si N est un Λ-module différentiel gradué à droite, on considère le Λ-module différentiel gradué $N \otimes_\Lambda D(M)$ dont la cohomologie $H(N \otimes_\Lambda D(M))$ est appelée Tor $\mathrm{dif}_\Lambda (N, M)$.

Munissons le Λ-module différentiel gradué $N \otimes_\Lambda D(M)$ de la filtation décroissante $F^{-p}(N \otimes_\Lambda D(M)) = \bigoplus_{i \geqslant -p} (N \otimes_\Lambda D(M)^{i,*})$ si $p \geqslant 0$, $F^{+1} = 0$. La différentielle de $N \otimes_\Lambda D(M)$ préserve cette filtration et on a

$$F^{-p}(N \otimes_\Lambda D(M)) = \bigoplus_n \big(F^{-p}(N \otimes_\Lambda D(M)) \cap (N \otimes_\Lambda D(M))^n\big).$$

Il en résulte une suite spectrale (E_r, d_r) et on a le théorème algébrique d'Eilenberg-Moore:

THÉORÈME 4.2.1 [7]. *Soit Λ une k-algèbre graduée connexe, soit M un Λ-module différentiel gradué à gauche et soit N un Λ-module différentiel gradué à droite. Alors il existe une suite spectrale de Λ-modules (E_r, d_r) appelée suite spectrale d'Eilenberg-Moore du triplet (Λ, N, M) telle que*

(i) $E_2^{-p} = \operatorname{Tor}^p_{H(\Lambda)}(H(N), H(M))$ *si* $p \geqslant 0$,

(ii) $\varinjlim E_r = \operatorname{Gr}(\operatorname{Tor}\operatorname{dif}_\Lambda(N, M))$,

(iii) *si* $\Lambda^1 = 0$, $E_r \Rightarrow \operatorname{Tor}\operatorname{dif}_\Lambda(N, M)$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème fondamental qui permet de comparer la suite spectrale étudiée au §1 et la suite spectrale d'Eilenberg-Moore.

On se donne trois ADGC connexes sur un corps k: (A, d_A), $(A', d_{A'})$, (C, d_c) et des morphismes d'ADGC α: $(A, d_A) \to (A', d_{A'})$, γ: $(A, d_A) \to (C, d_c)$, et on suppose que α^{*1} est injectif. On considère A' comme un A-module différentiel à gauche (au couple (a, a') on associe $\alpha(a)a'$ où $a \in A$, $a' \in A'$), on considère C comme un A-module différentiel à droite (au couple (c, a) on associe $c\gamma(a)$ où $a \in A$, $c \in C$). La suite spectrale d'Eilenberg-Moore du triplet (A, C, A') est alors une suite spectrale de A-algèbres commutatives.

THÉORÈME 4.2.2. *La suite spectrale d'Eilenberg-Moore du triplet (A, C, A') peut être identifiée, par un isomorphisme de k-algèbres différentielles bigraduées, à partir du terme E_2, à la suite spectrale définie au* §1 *sur $(C \otimes_k \Lambda X, \Delta')$ et vérifiant les conclusions du Théorème* 4.1.1.

COROLLAIRE 4.2.3. (i) *On a un isomorphisme d'algèbres graduées*: $\operatorname{Tor}\operatorname{dif}_A(C, A') = H^*(C \otimes \Lambda X, \Delta')$. (*Cet isomorphisme sera décrit dans la Proposition* 4.3.4.)

(ii) *On a un isomorphisme d'algèbres bigraduées*

$$\operatorname{Tor}_{H^*(A)}(H^*(C), H^*(A')) = H^*(H^*(C) \otimes \Lambda X, \delta').$$

REMARQUE. Le Théorème 4.2.2 prouve à posteriori que la suite spectrale définie au §1 à partir des ADGC (A, d_A), $(A', d_{A'})$, (C, d_c) est indépendante du modèle filtré choisi.

La projection ε: $A \to k = A/A^+$ fait de k un A-module différentiel à droite et on a un cas particulier du Théorème 4.2.2:

THÉORÈME 4.2.4. *La suite spectrale d'Eilenberg-Moore du triplet (A, k, A') peut être identifiée, à partir du terme E_2, par un isomorphisme de k-algèbres différentielles bigraduées, à la suite spectrale définie sur $(\Lambda X, D'')$ par le Théorème* 4.1.2.

On a un isomorphisme d'algèbres graduées

$$\operatorname{Tor}\operatorname{dif}_A(k, A') = H^*(\Lambda X, D'').$$

On a un isomorphisme d'algèbres bigraduées

$$\operatorname{Tor}_{H^*(A)}(k, H^*(A')) = H^*(\Lambda X, d'').$$

Rappelons que dans [7], Eilenberg et Moore définissent une suite spectrale associée à un fibré image réciproque d'un fibré de Serre:

$$\begin{array}{ccc} F & = & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E' = B' \times_B E & \rightarrow & E \\ f'\downarrow & & \downarrow f \\ B' & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

où tous les espaces sont connexes par arcs.

Si k est un corps de caractéristique 0 fixé, ils considèrent l'algèbre $C^*(B, k)$ des cochaines simpliciales sur k et regardent les algèbres $C^*(B', k)$ et $C^*(E, k)$ comme des $C^*(B, k)$-modules différentiels. Ils appliquent alors le Théorème 4.2.1 au triplet $(C^*(B, k), C^*(B', k), C^*(E, k))$. Cette suite spectrale est appelée la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du carré fibré. Si B' est réduit à un point, alors $E' = F$ et la suite spectrale du triplet $(C^*(B, k), k, C^*(E, k))$ est appelée la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du fibré $F \to E \to B$.

Un des résultats fondamentaux de cet article est:

THÉORÈME 4.2.5. *Soit* $F \to E \xrightarrow{f} B$ *un fibré de Serre et soit* $B' \xrightarrow{g} B$ *une application continue. On note* $F \to E' = B' \times_B E \xrightarrow{f'} B'$ *le fibré image réciproque. On se fixe un corps k de caractéristique* 0. *On suppose que tous les espaces sont connexes par arcs et que les hypothèses du Théorème* 1.7 *sont vérifiées. Alors*

(i) *La suite spectrale d'Eilenberg-Moore est isomorphe, par un isomorphisme de k-algèbres différentielles bigraduées, à partir du terme* E_2, *à la suite spectrale définie au* §1 *sur les ADGC* $A(B') \xleftarrow{A(g)} A(B) \xrightarrow{A(f)} A(E)$ *et vérifiant les propriétés du Théorème* 4.1.1.

(ii) *La suite spectrale d'Eilenberg-Moore du carré fibré est telle que*

$$E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(B,k)}(H^*(B', k), H^*(E, k)) = H^*(H^*(B') \otimes \Lambda X, \delta'),$$

$$\varinjlim_r E_r = \mathrm{Gr}\, H^*(E', k).$$

Si B est simplement connexe, $E_r \Rightarrow H^*(E', k)$.

REMARQUE 4.2.6. L'intérêt du Théorème 4.2.5 est d'une part, de donner une autre démonstration, du fait que la suite spectrale d'Eilenberg-Moore converge, dans le cas simplement connexe, vers $H^*(E', k)$, et d'autre part de donner une méthode explicite de calcul des termes (E_r, d_r) de cette suite spectrale.

THÉORÈME 4.2.7. *Soit* $F \to E \xrightarrow{f} B$ *un fibré de Serre vérifiant les hypothèses du Théorème* 1.6. *Si* f^*: $H^*(B, k) \to H^*(E, k)$ *a pour modèle minimal bigradué* $(\Lambda Z, d) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') \to (\Lambda X, d'')$ *et si f a pour modèle filtré* $(\Lambda Z, D) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \to (\Lambda X, D'')$, *alors*:

(i) *La suite spectrale d'Eilenberg-Moore du fibré est isomorphe, à partir du terme* E_2, *par un isomorphisme de k-algèbres différentielles bigraduées, à la suite spectrale définie au Théorème* 4.1.2 *sur* $(\Lambda X, D'')$.

(ii) *La suite spectrale d'Eilenberg-Moore du fibré est telle que*

$$E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(B,k)}(k, H^*(E, k)) = H^*(\Lambda X, d''),$$
$$\varinjlim E_r = \mathrm{Gr}\, H^*(F, k).$$

Si B est simplement connexe, $E_r \Rightarrow H^*(F, k)$.

EXEMPLE 4.2.8. Soit B un espace simplement connexe, de modèle filtré $(\Lambda Z, D)$. Alors il existe une suite spectrale d'ADGC telle que $E_2 = \mathrm{Tor}_{H^*(B,k)}(k, k) = \Lambda \overline{Z}$ (où $\overline{Z}^p_m = Z^{p+1}_{m-1}$ si $m \geqslant 1, p \geqslant 1$)

$$E_r \Rightarrow H^*(\Omega B, k).$$

C'est la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du fibré $\Omega B \to E_B \xrightarrow{f} (B, b_0)$ où E_B est l'espace contractile des chemins d'origine b_0, et l'application f envoie un chemin sur son extrémité.

REMARQUE 4.2.9. Dans **[16]**, L. Smith cherchait à décrire la filtration $\tilde{F}^{-p}H^*(E')$ provenant de la filtration d'Eilenberg-Moore. Le Théorème 4.2.5 permet de donner une expression simple de la filtration $F^{-p}H^*(E')$ décrite au §1 et isomorphe (au sens des algèbres filtrées) à la filtration précédente. on a

$$F^{-p}H^*(E') = \left\{[\alpha] | \alpha \in \mathrm{Ker}\, \Delta' \cap \sum_{n<p} A(B') \otimes (\Lambda X)_n\right\}.$$

En particulier, $F^0H^*(E')$ s'identifie à l'image de $H^*(B') \otimes_k H^*(E)$ dans $H^*(E')$ par l'application naturelle déduite du carré fibré.

3. Démonstration des Théorèmes 4.2.2 et 4.2.5. On démontre d'abord le Théorème 4.2.5 en supposant connu le Théorème 4.2.2.

Compte-tenu de la définition de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore d'un carré fibré et du Théorème 4.2.2, le (i) du Théorème 4.2.5 sera prouvé si on montre que les suites spectrales d'Eilenberg-Moore des triplets $(C^*(B, k), C^*(B', k), C^*(E, k))$ et $(A(B), A(B'), A(E))$ sont isomorphes à partir du terme E_2, en tant que k-algèbres différentielles bigraduées.

Au foncteur $C^*(., k)$, on peut associer une k-ADG simpliciale C_k définie par $(C_k)_n = C^*(\Delta(n), k)$ où $\Delta(n)$ est le n-simplexe euclidien type. De plus (**[5]**, **[14]**), on associe à toute k-ADG simpliciale D_k un foncteur $D_k(.)$ de la catégorie des ensembles simpliciaux dans celle des k-algèbres différentielles graduées. Le foncteur $C_k(.)$ est isomorphe à $C^*(., k)$. Le foncteur $A(.)$ de Sullivan est le foncteur associé à la k-ADG simpliciale $A_k = A_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} k$ où $(A_{\mathbf{Q}})_n$ est l'espace des formes différentielles polynômiales sur le n-simplexe Δ_n. Les inclusions de k-ADG simpliciales i: $A_k \to A_k \otimes C_k$ et j: $C_k \to A_k \otimes C_k$ définissent des transformations naturelles de foncteurs

$$i(.): A(.) \to (A_k \otimes C_k)(.) = D(.),$$
$$j(.): C^*(., k) \to (A_k \otimes C_k)(.) = D(.).$$

Par définition d'une transformation de foncteurs, on a les diagrammes commutatifs suivants:

$$\begin{array}{ccccc} A(B') & \xleftarrow{A(g)} & A(B) & \xrightarrow{A(f)} & A(E) \\ i(B')\downarrow & & \downarrow i(B) & & \downarrow i(E) \\ D(B') & \xleftarrow{D(g)} & D(B) & \xrightarrow{D(f)} & D(E) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} C^*(B', k) & \xleftarrow{C(g)} & C^*(B, k) & \xrightarrow{C(f)} & C^*(E, k) \\ \downarrow j(B') & & \downarrow j(B) & & \downarrow j(E) \\ D(B') & \xleftarrow{D(g)} & D(B) & \xrightarrow{D(f)} & D(E) \end{array}$$

D'aprés le Théorème III.3 de **[14]**, toutes les flèches verticales sont des isomorphismes en cohomologie. Le Corollaire 1.3 de **[16]** permet de conclure.

Montrons (ii). Soit

$$\begin{array}{ccccc} A(B) & \xrightarrow{A(f)} & A(E) & \rightarrow & A(F) \\ & \searrow & \uparrow \phi & & \uparrow \alpha \\ & & A(B) \otimes \Lambda U & \rightarrow & \Lambda U \end{array}$$

le modèle minimal de $A(f)$ donné par le Théorème 1.3.

D'après le Théorème 1.7, on a un diagramme commutatif dont les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes:

$$\begin{array}{ccccc} A(B') & \xrightarrow{A(f')} & A(E') & \rightarrow & A(F) \\ \| & & \uparrow \varphi_1 & & \uparrow \alpha \\ A(B') & \rightarrow & A(B') \otimes_{A(B)} (A(B) \otimes \Lambda U) & \rightarrow & \Lambda U \\ & & \| & & \\ & & A(B') \otimes_k \Lambda U & & \end{array}$$

D'autre part, le diagramme suivant dont les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes:

$$\begin{array}{ccccc} A(B) & \rightarrow & A(B) \otimes \Lambda U & \rightarrow & \Lambda U \\ \uparrow \pi & & \uparrow \pi' & & \uparrow \pi'' \\ (\Lambda Z, D) & \rightarrow & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') & \rightarrow & (\Lambda X, D'') \end{array}$$

induit un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} A(B') & \rightarrow & A(B') \otimes_{A(B)} (A(B) \otimes \Lambda U) & \rightarrow & \Lambda U \\ \| & & \uparrow \pi'_1 & & \uparrow \pi'' \\ A(B') & \rightarrow & A(B') \otimes_{(\Lambda Z, D)} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') & \rightarrow & (\Lambda X, D'') \end{array}$$

Les théorèmes d'isomorphie de **[11]** impliquent que $\pi_1'^*$ est un isomorphisme et donc:

$$H^*(A(B') \otimes \Lambda X, \Delta') = H^*(E', k). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

La démonstration du Théorème 4.2.2 est longue.

Les grandes lignes de cette démonstration sont le mêmes que celles de [**12**, §7]. On utilise deux filtrations sur la bar construction (la filtration d'Eilenberg-Moore et une filtration liée à la structure filtrée du modèle) qui donnent le même terme E_2. On définit ensuite un morphisme d'ADGC σ: $(\mathfrak{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z \otimes \Lambda X), \nabla) \to (C \otimes \Lambda X, \Delta')$ distinct de celui utilisé par Halperin et Stasheff, et on montre, par une méthode différente de celle de [**12**], que σ^* est un isomorphisme, puis que σ induit un isomorphisme de k-algèbres différentielles bigraduées entre le terme E_2 de la suite spectrale définie sur la bar construction et le terme E_2 de la suite spectrale définie sur $(C \otimes \Lambda X, \Delta')$ au §1.

Rappelons que la construction de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore d'un triplet (Λ, N, M) repose sur l'existence d'une résolution projective propre appelée la bar construction [**16**], [**18**].

Soient (A, d_A), $(A', d_{A'})$, (C, d_c) trois ADGC connexes sur un corps k et des morphismes d'ADGC α: $(A, d_A) \to (A', d_{A'})$, γ: $(A, d_A) \to (C, d_c)$.

On pose $A^+ = \{a \in A \mid |a| > 0\}$ et on définit pour $n \geqslant 0$

$$\mathfrak{B}_A^{-n}(A, A') = A \otimes_k A^+ \underbrace{\otimes \cdots \otimes}_{n \text{ fois}} A^+ \otimes A'.$$

$\mathfrak{B}_A^{-n}(A, A')$ a une structure de k-espace vectoriel gradué comme produit tensoriel d'espaces gradués et a une structure naturelle de A-module à gauche. On définit une différentielle de degré $+1$ sur $\mathfrak{B}_A^{-n}(A, A')$ qui en fait un A-module différentiel, et une application A-linéaire de modules différentiels ∂_E: $\mathfrak{B}_A^{-n}(A, A') \to \mathfrak{B}_A^{-n+1}(A, A')$ pour $n \geqslant 1$. On montre:

LEMME 4.3.1 [**16**].

$$\cdots \to \mathfrak{B}_A^{-n}(A, A') \xrightarrow{\partial_\varepsilon} \mathfrak{B}_A^{-n+1}(A, A') \to \cdots \to \mathfrak{B}_A^{0}(A, A') \xrightarrow{\varepsilon} A' \to 0$$

est une résolution projective propre du A-module différentiel à gauche A' (où $\varepsilon(a \otimes a') = \alpha(a)a'$).

On remarque que $C \otimes_A \mathfrak{B}_A^{-n}(C, A') \simeq C \otimes A^+ \otimes_n A'$, ce qu'on notera $\mathfrak{B}_A^{-n}(C, A')$.

On pose $\mathfrak{B}_A(C, A') = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{B}_A^{-n}(C, A')$.

Un élément $c \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a'$ de $\mathfrak{B}_A^{-n}(C, A')$ est noté $c[a_1| \ldots |a_n]a'$ où $c \in C, a_i \in A^+, a' \in A'$.

Son bidegré est $(-n, |c| + \sum_{i=1}^n |a_i| + a')$, son degré total est donc $|c| + \sum_{i=1}^n (|a_i| - 1) + |a'|$.

Pour tout élément $c[a_1| \ldots |a_n]a'$, on définit $s(0) = |c|$ et

$$s(i) = |c| + \sum_{j<i} (|a_j| - 1), \quad i \in [1, \ldots, n].$$

On munit le complexe $C \otimes_A (\bigoplus_n \mathfrak{B}_A^{-n}(A, A')) = \mathfrak{B}_A(C, A')$ du A-produit tensoriel de d_c et de la différentielle totale de $\bigoplus_n \mathfrak{B}_A^{-n}(A, A')$. Soit ∇ la différentielle sur $\mathfrak{B}_A(C, A')$, on a $\nabla = d_I + d_E$, avec

$$d_I(c[a_1|\ldots|a_n]a') = d_c(c)[a_1|\ldots|a_n]a' + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{s(i-1)}$$
$$\cdot c[a_1|\ldots|d_Aa_i|\ldots|a_n]a' + (-1)^{s(n)}c[a_1|\ldots|a_n]d_{A'}a'.$$
$$d_E(c[a_1|\ldots|a_n]a') = (-1)^{|c|+|a_1|}c\gamma(a_1)[a_2|\ldots|a_n]a'$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{s(i)}c[a_1|\ldots|a_ia_{i+1}|\ldots|a_n]a'$$
$$+ (-1)^{s(n)}c[a_1|\cdots|a_{n-1}]\alpha(a_n)a'$$

(où $c \in C$, $a_i \in A^+$, $i = 1, \ldots, n$, $a' \in A'$).

$(\mathcal{B}_A(C, A'), \nabla)$ s'appelle la bar construction du triplet (A, C, A'). On filtre $\mathcal{B}_A(C, A')$ ainsi: $\tilde{F}^{-p}\mathcal{B}_A(C, A') = \{c[a_1|\ldots|a_n]a', n \leqslant p\}$, $\tilde{F}^{+1} = 0$.

D'après le Théorème 4.2.1, cette filtration définit la suite spectrale d'Eilenberg-Moore $(\tilde{E}_i, \tilde{d}_i)$ du triplet (A, C, A') et on a $\operatorname{Tor\,dif}_A(C, A') = H^*(\mathcal{B}_A(C, A'), \nabla)$.

Le terme $\tilde{E}_2$ est égal à la cohomologie de la bar construction du triplet $H^*(C) \xleftarrow{\gamma^*} H^*(A) \xrightarrow{\alpha^*} H^*(A')$.

LEMME 4.3.2 [18]. (i) $(\mathcal{B}_A(C, A'), \nabla)$ *a une structure de k-algèbre différentielle graduée commutative augmentée. L'augmentation est définie par* ε: $\mathcal{B}_A(C, A') \to k$ *où* $\varepsilon(\lambda[a_1|\ldots|a_n]\mu) = 0$ *si* $n \geqslant 1$, $\varepsilon(\lambda \otimes \mu) = \lambda\mu$, *si* $\lambda \in k$, $\mu \in k$, $a_i \in A^1$.

(ii) *Si* $A^1 = 0$, *alors* $\mathcal{B}_A(C, A')$ *est connexe.*

LEMME 4.3.3. *Soient* (A, d_A), $(A', d_{A'})$, $(A'', d_{A''})$, (B, d_B), $(B', d_{B'})$, $(B'', d_{B''})$ *des ADGC connexes sur un corps k. On suppose que* (B, d_B) *est une K-S algèbre libre. On suppose donnés des morphismes d'ADGC* $A'' \xleftarrow{\alpha'} A \xrightarrow{\alpha} A'$, $B'' \xleftarrow{\beta'} B \xrightarrow{\beta} B'$ *et des quasi-isomorphismes* π: $B \to A$, π': $B' \to A'$, π'': $B'' \to A''$ *tels que*

(i) $\alpha\pi$ *est homotope à* $\pi'\beta$,

(ii) $\alpha'\pi$ *est homotope à* $\pi''\beta'$.

Alors les suites spectrales d'Eilenberg-Moore des triplets (A, A'', A') *et* (B, B'', B') *sont isomorphes, à partir du terme* E_2, *par un isomorphisme de k-algèbres différentielles bigraduées décrit ci-dessous.*

DÉMONSTRATION. Le lemme est vrai dans le cas où $\alpha\pi = \pi'\beta$ et $\alpha'\pi = \pi''\beta'$, car on définit un morphisme d'ADGC $\mathcal{B}_\pi(\pi'', \pi')$: $\mathcal{B}_B(B'', B') \to \mathcal{B}_A(A'', A')$ par

$$\mathcal{B}_\pi(\pi'', \pi')(b''[b_1|\ldots|b_n]b') = \pi''(b'')[\pi(b_1)|\ldots|\pi(b_n)]\pi'(b')$$

où $b_i \in B^+$, $i = 1, \ldots, n$, $b' \in B'$, $b'' \in B''$.

Ce morphisme induit un morphisme entre les termes de degré i des suites spectrales, noté $(\mathcal{B}_\pi(\pi'', \pi'))_i$, et $(\mathcal{B}_\pi(\pi'', \pi'))_1 \simeq \mathcal{B}_{\pi^*}(\pi''^*, \pi'^*)$ est un isomorphisme.

Dans le cas général, on se ramène à des diagrammes commutatifs:

Par définition de l'homotopie, il existe un morphisme d'ADGC ϕ: $B^I \to A'$ tel que $\phi\lambda_0 = \alpha\pi$, $\phi\lambda_1 = \pi'\beta$.

De même, il existe un morphisme Ψ: $B^I \to A''$ tel que $\Psi\lambda_0 = \alpha'\pi$, $\Psi\lambda_1 = \pi''\beta'$.

On applique alors la première partie de la démonstration aux trois diagrammes commutatifs:

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \overset{\Psi}{\leftarrow} & B^I & \overset{\phi}{\rightarrow} & A' \\ \pi''\uparrow & & \lambda_1\uparrow & & \pi'\uparrow \\ B'' & \overset{\beta'}{\leftarrow} & B & \overset{\beta}{\rightarrow} & B' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \overset{\Psi}{\leftarrow} & B^I & \overset{\phi}{\rightarrow} & A' \\ \uparrow\mathrm{id} & & \uparrow\lambda_0 & & \uparrow\mathrm{id} \\ A'' & \overset{\Psi\lambda_0}{\leftarrow} & B & \overset{\phi\lambda_0}{\rightarrow} & A' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \overset{\alpha'}{\leftarrow} & A & \overset{\alpha}{\rightarrow} & A' \\ \mathrm{id}\uparrow & & \pi\uparrow & & \uparrow\mathrm{id} \\ A'' & \overset{\Psi\lambda_0}{\leftarrow} & B & \overset{\phi\lambda_0}{\rightarrow} & A' \end{array} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Revenons aux données du Théorème 4.2.2, construisons le modèle minimal bigradué de α^*:

$$\begin{array}{ccccc} H(A, d_A) & \overset{\alpha^*}{\rightarrow} & H(A', d_{A'}) & & \\ \rho\uparrow & & \uparrow\rho' & & \\ (\Lambda Z, d) & \rightarrow & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') & \rightarrow & (\Lambda X, d'') \end{array}$$

et le modèle filtré de α:

$$\begin{array}{ccccc} (A, d_A) & \overset{\alpha}{\rightarrow} & (A', d_{A'}) & & \\ \pi\uparrow & & \pi'\uparrow & & \\ (\Lambda Z, D) & \rightarrow & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') & \rightarrow & (\Lambda X, D''). \end{array}$$

D'après le Lemme 4.3.3, la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du triplet (A, C, A') est isomorphe à celle du triplet $((\Lambda Z, D), (C, d_c), (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D'))$. On pose $\gamma' = \gamma\pi$: $(\Lambda Z, D) \to (C, d_c)$.

Proposition 4.3.4. *L'application σ: $(\mathfrak{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z \otimes \Lambda X), \nabla) \to (C \otimes_k \Lambda X, \Delta')$ définie par $\sigma = 0$ sur $\mathfrak{B}^{-n}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z \otimes \Lambda X)$ si $n > 0$; $\sigma(c \otimes u \otimes v) = c\gamma'(u) \otimes v$ si $c \in C$, $u \in \Lambda Z$, $v \in \Lambda X$, est un quasi-isomorphisme d'ADGC.*

Corollaire. *On a*

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor\,dif}_A(C, A') &= H^*(\mathfrak{B}_A(C, A'), \nabla) = \mathrm{Tor\,dif}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z \otimes \Lambda X) \\ &= H^*(\mathfrak{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z \otimes \Lambda X), \nabla) = H^*(C \otimes \Lambda X, \Delta'). \end{aligned}$$

Corollaire. *On a*

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor\,dif}_A(k, A') &= H^*(\mathfrak{B}_A(k, A'), \nabla) = \mathrm{Tor\,dif}_{\Lambda Z}(k, \Lambda Z \otimes \Lambda X) \\ &= H^*(\mathfrak{B}_{\Lambda Z}(k, \Lambda Z \otimes \Lambda X), \nabla) = H^*(\Lambda X, D''). \end{aligned}$$

Démonstration de la Proposition 4.3.4. On vérifie facilement que σ est un morphisme d'ADGC. Montrons que σ^* est un isomorphisme.

Soit $\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z)$ la bar construction sur le triplet d'ADGC $(C, d_c) \xleftarrow{\gamma'} (\Lambda Z, D) \xrightarrow{\text{id}} (\Lambda Z, D)$ et ∇_0 la différentielle totale correspondante. L'inclusion

$$j\colon (\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z), \nabla_0) \to (\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z \otimes \Lambda X), \nabla)$$

définie par $j(c[a_1| \dots |a_n]u) = c[a_1| \dots |a_n]u \otimes 1$ si $c \in C$, $a_i \in \Lambda^+ Z$, $u \in \Lambda Z$ est un morphisme d'ADGC.

On définit une projection

$$q\colon (\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z \otimes \Lambda X), \nabla) \to (\Lambda X, D'')$$

par $q = 0$ sur $\bigoplus_{n>0} \mathcal{B}^{-n}(C, \Lambda Z \otimes \Lambda X)$ et sur $\mathcal{B}^0_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z \otimes \Lambda X) = C \otimes \Lambda Z \otimes \Lambda X$, q est la projection canonique. On vérifie que q est un morphisme d'ADGC.

On définit une application $\phi\colon (\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z), \nabla_0) \to (C, d_c)$ par $\phi = 0$ sur $\bigoplus_{n>0} \mathcal{B}^{-n}(C, \Lambda Z)$ et $\phi(c \otimes u) = c\gamma'(u)$ si $c \in C$, $u \in \Lambda Z$. On vérifie que ϕ est un morphisme d'ADGC. Alors

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z), \nabla_0) & \xrightarrow{j} & (\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z \otimes \Lambda X), \nabla) & \xrightarrow{q} & (\Lambda X, D'') \\ \phi\downarrow & & \downarrow\sigma & & \downarrow\text{id} \\ (C, d_c) & \overset{i}{\hookrightarrow} & (C \otimes \Lambda X, \Delta') & \xrightarrow{p} & (\Lambda X, D'') \end{array} \qquad (*)$$

(où i est l'inclusion et p la projection) est un diagramme commutatif de K-S extensions d'algèbres augmentées.

Si on montre que ϕ^* est un isomorphisme, on aura $H^0(\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z), \nabla_0) = H^0(C, d_c) = k$. De là, on déduit que $H^0(\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z \otimes \Lambda X), \nabla) = k$.

Les ADGC figurant dans le diagramme $(*)$ sont donc toutes c-connexes, les théorèmes d'isomorphisme de **[11]** montrent que si ϕ^* est un isomorphisme, alors σ^* sera un isomorphisme.

Filtrons (C, d_c) par $F^{-p}(C) = C$ si $p \geqslant 0$, $F^{+q}(C) = 0$ si $q > 0$, on a $E_1^{-p} = E_1^0 = H^*(C, d_c)$ et $d_i = 0$ si $i \geqslant 1$ dans la suite spectrale induite par cette filtration.

Filtrons $\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z)$ par la filtration d'Eilenberg-Moore. On a $\tilde{E}_2^{-p} = \operatorname{Tor}^p_{H^*(\Lambda Z)}(H^*(C), H^*(\Lambda Z))$ dans la suite spectrale d'Eilenberg-Moore, donc on a $\tilde{E}_2^{-p} = 0$ si $p > 0$ et $\tilde{E}_2^0 = H^*(C) \otimes_{H^*(\Lambda Z)} H^*(\Lambda Z)$ et le morphisme $\phi_2 = \phi_2^0\colon \tilde{E}_2^0 \to H^*(C)$ est donné par

$$\phi_2^0([c] \otimes_{H^*(\Lambda Z)} [\lambda]) = [c]\gamma'^*[\lambda] \quad \text{si } c \in C, \lambda \in \Lambda Z.$$

Ceci montre que ϕ_2 est un isomorphisme, et donc que ϕ^* est un isomorphisme car les filtrations sont dans le second quadrant.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 4.3.4.

On a déjà montré que la suite spectrale définie au paragraphe 1 et la suite spectrale d'Eilenberg-Moore avaient même terme E_∞.

Comme le morphisme σ ne préserve pas les filtrations, on va définir une nouvelle filtration sur $\mathcal{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z \otimes \Lambda X)$ notée $\hat{F}^{-p}$, telle que $\sigma(\hat{F}^{-p}) \subset F^{-p}(C \otimes \Lambda X)$ et $\hat{F}^{-p} \subset \tilde{F}^{-p}$. On aura des homomorphismes $\sigma_i\colon \hat{E}_i \to E_i$ induits par σ et des homomorphismes Θ_i: $\hat{E}_i \to \tilde{E}_i$ induits par l'identité sur $\mathfrak{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z \otimes \Lambda X)$. On montrera que pour $i = 2$ (et donc $i \geqslant 2$) ces homomorphismes sont des isomorphismes.

On définit une trigraduation sur $\mathfrak{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z \otimes \Delta X)$ de la manière suivante: soient $c \in C^s$, $a_i \in (\Lambda Z)^{-n_i, q_i} = (\Lambda Z)_{n_i}^{q_i - n_i}$ pour $i = 1, \ldots, l$,

$$U \in (\Lambda Z \otimes \Lambda X)^{-m,r} = (\Lambda Z \otimes \Lambda X)_m^{r-m},$$

alors l'élément $c[a_1| \cdots |a_l]U$ a pour tridegré: $(-l, -\Sigma_{i=1}^l n_i + m, s + \Sigma_{i=1}^l q_i + r)$.

On a

$$\mathfrak{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z \otimes \Lambda X) = \sum_{\substack{l \geqslant 0 \\ n \geqslant 0 \\ q \geqslant 0}} \mathfrak{B}^{-l,-n,q}.$$

On pose

$$\hat{F}^{-p}\mathfrak{B}_{\Lambda Z}(C, \Lambda Z \otimes \Lambda X) = \sum_{l+n \leqslant p} \mathfrak{B}^{-l,-n,*}$$

si $p \geqslant 0$ et $\hat{F}^{+1} = 0$. On remarque que $\tilde{F}^{-p} = \Sigma_{l \leqslant p} \mathfrak{B}^{-l,*,*}$ et donc que $\hat{F}^{-p} \subset \tilde{F}^{-p}$.

La différentielle ∇ préserve la filtration $\hat{F}^{-p}$, et on construit une suite spectrale notée $(\hat{E}_i, \hat{d}_i)$.

Proposition 4.3.5. *La suite spectrale* $(\hat{E}_i, \hat{d}_i)$ *vérifie*:

(1) $\hat{E}_0^{-p} = \Sigma_{l+n=p} \mathfrak{B}_{\Lambda Z}^{-l,-n,*}(C, \Lambda Z \otimes \Lambda X)$;

$$\hat{d}_0(c[a_1| \ldots |a_l]U) = d_c(c)[a_1| \ldots |a_l]U$$

si $c \in C$, $a_i \in \Lambda^+ Z$, $U \in \Lambda Z \otimes \Lambda X$.

(2) $\hat{E}_1^{-p} \simeq \mathfrak{B}_{(\Lambda Z, d)}^{-p}(H^*(C), (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d'))$ *où* $H^*(C)$ *est considéré comme un* $(\Lambda Z, d)$*-module différentiel à gauche grâce à* $\gamma^*\rho$. *La différentielle* $\hat{d}_1$ *est égale à la différentielle totale de la bar construction associée au triplet*

$$(H^*(C), 0) \xleftarrow{\gamma^*\rho} (\Lambda Z, d) \xrightarrow{i} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d').$$

Proposition 4.3.6. *Le morphisme* σ *défini dans la Proposition* 4.3.4 *est tel que* $\sigma(\hat{F}^{-p}) \subset F^{-p}$ *et le morphisme induit* σ_2: $(\hat{E}_2, \hat{d}_2) \to (E_2, d_2)$ *est un isomorphisme.*

Proposition 4.3.7. *On a* $\hat{F}^{-p} \subset \tilde{F}^{-p}$ *et le morphisme* Θ_2 *induit par l'identité, de* $(\hat{E}_2, \hat{d}_2)$ *dans* $(\tilde{E}_2, \tilde{d}_2)$, *est un isomorphisme.*

Ces 3 propositions se démontrent aisément en généralisant les méthodes employées dans **[12]** pour démontrer le Théorème 7.14.

La démonstration du Théorème 4.2.2 est ainsi achevée.

Remarque 4.3.8. Le Lemme 4.3.3 permet de donner un énoncé un peu différent du Théorème 4.2.5. Si ψ': $(\Lambda U_{B'}, d_{B'}) \to A(B')$ est le modèle minimal de B', il existe un morphisme d'ADGC Θ: $(\Lambda Z, D) \to (\Lambda U_{B'}, d_{B'})$ tel que $\psi'\Theta$ soit homotope à

$A(g)\pi$; et on a

THÉORÈME 4.3.9. *Soit un carré fibré*

$$\begin{array}{ccc} F & = & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E' & \to & E \\ f'\downarrow & & \downarrow f \\ B' & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

satisfaisant aux hypothèses du Théorème 4.2.5.

Alors la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du carré fibré est isomorphe, comme suite spectrale d'algèbres graduées différentielles à la suite spectrale définie au §1 *sur* $(\Lambda U_{B'}, d_{B'}) \otimes_{(\Lambda Z, D)} (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \simeq \Lambda U_{B'} \otimes_k \Lambda X$ *munie de la différentielle* Δ' *correspondante.*

4. Applications du théorème fondamental 4.2.5. On dit qu'une suite spectrale (E_i, d_i) collapse au $m$ième terme si $d_i = 0$ pour tout $i \geqslant m$.

Si la suite spectrale est dans le second quadrant, et si elle collapse au $m$ième terme, alors on a $E_m = E_\infty$.

Rappelons que si $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{f} B$ est un fibré de Serre dont les espaces sont connexes par arcs et si B est simplement connexe, si k est un corps commutatif, on définit une suite spectrale appelée suite spectrale de Serre du fibré dont le terme E_2 vérifie $E_2^{p,q} = H^p(B, k) \otimes H^q(F, k)$ et $E_\infty = \operatorname{Gr} H^*(E, k)$.

Si $H^*(F, k)$ ou si $H^*(B, k)$ est de type fini, Serre montre que la suite spectrale collapse au terme E_2 si et seulement si j^* est surjective.

PROPOSITION 4.4.1. *Soit un fibré de Serre* $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{f} B$ *dont les espaces sont connexes par arcs,* B *simplement connexe. On suppose que* $H^*(F, k)$ *ou* $H^*(B, k)$ *est de type fini. Soit*

$$\begin{array}{ccccc} H^*(B) & \xrightarrow{f^*} & H^*(E) & \xrightarrow{j^*} & H^*(F) \\ \rho\uparrow & & \uparrow\rho' & & \uparrow\rho'' \\ (\Lambda Z, d) & \to & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') & \to & (\Lambda X, d'') \end{array}$$

le modèle minimal bigradué de f^* *(où* ρ'' *est induit par* ρ'*); soit* $(\Lambda Z, D) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X, D') \to (\Lambda X, D'')$ *le modèle filtré de* f.

Alors si $H_+(\Lambda X, d'') = 0$, *la suite spectrale de Serre collapse au terme* E_2.

DÉMONSTRATION. Si $H_+(\Lambda X, d'') = 0$, le terme $\tilde{E}_2$ de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du fibré vérifie $\tilde{E}_2^{-p} = 0$ si $p > 0$; ce qui implique que $\tilde{E}_\infty^{-p} = 0$ si $p > 0$ et $\tilde{E}_\infty^0 = \tilde{E}_2^0 = H^*(\Lambda X, D'')$; donc $H^*(\Lambda X, D'') = \{[\alpha] \in H^*(\Lambda X, D'') | \alpha \in \Lambda X_0\}$. On définit ainsi une surjection s: $H_0(\Lambda X, d'') \to H^*(\Lambda X, D'')$ induite par l'identité de ΛX_0. De plus, on a $\pi''^* s = \rho''^*$, ce qui entraîne que ρ''^* est surjective, puis que j^* est surjective. Le théorème de Serre permet de conclure.

PROPOSITION 4.4.2. *Soit un fibré de Serre* $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{f} B$ *dont les espaces sont connexes par arcs,* B *simplement connexe et* $H^*(F, k)$ *est de type fini. Supposons que la suite spectrale de Serre collapse au terme* E_2, *alors*

(1) $H_+(\Lambda X, d'') = 0$ *et* ρ''^*: $H_0(\Lambda X, d'') \to H^*(F)$ *est un isomorphisme.*

(1′) $(\Lambda X, D'')$ *est le modèle filtré de la fibre* F.

(2) *La suite spectrale d'Eilenberg-Moore du fibré collapse au terme* $\tilde{E}_2$, $\tilde{E}_2^{-p} = 0$ *si* $p > 0$ *et le morphisme naturel d'algèbres graduées* $k \otimes_{H^*(B,k)} H^*(E,k) \to H^*(F,k)$ *est un isomorphisme.*

(3) *Pour tout espace connexe par arcs* B' *et toute application continue* g: $B' \to B$, *la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du carré fibré*:

$$\begin{array}{ccc} F & = & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' \times_B E = E' & \to & E \\ f'\downarrow & & \downarrow f \\ B' & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

collapse au terme $\tilde{E}_2$; *de plus on a* $\tilde{E}_2^{-p} = 0$ *si* $p > 0$, *et le morphisme naturel d'algèbres graduées*: $H^*(B',k) \otimes_{H^*(B,k)} H^*(E,k) \to H^*(E',k)$ *est un isomorphisme.*

4) *Pour tout espace* B' *simplement connexe et toute application continue* g: $B' \to B$, *la suite spectrale de Serre du fibré image réciproque* $F \to E' = B' \times_B E \xrightarrow{f'} B'$ *collapse au terme* E_2.

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord (3): on sait, d'après un théorème de Leray-Hirsh [**3**], que si la suite spectrale de Serre collapse, f^* munit $H^*(E,k)$ d'une structure de $H^*(B,k)$-module libre. Dans la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du carré fibré, on a $\tilde{E}_2^{-p} = \mathrm{Tor}^p_{H^*(B)}(H^*(B'), H^*(E))$, donc $\tilde{E}_2^{-p} = 0$, si $p \neq 0$. Cette suite spectrale collapse donc au terme $\tilde{E}_2$ et de plus $\tilde{E}^0_\infty = \tilde{E}_\infty = H^*(E',k) = \tilde{E}^0_2 = H^*(B') \otimes_{H^*(B)} H^*(E)$. Le (2) est une conséquence de (3) en prenant B' réduit à un point.

Montrons (1). D'après le Théorème 4.2.2, on sait que $\tilde{E}_2^{-p} = H_p(\Lambda X, d'')$, donc on a $H_+(\Lambda X, d'') = 0$. Si la suite spectrale de Serre collapse, j^* est surjective, donc ρ''^* est surjective. Pour tout $n \geqslant 0$, ρ''^{*n} est une application surjective entre espaces de même dimension, donc c'est un isomorphisme.

Montrons (4). D'après (3), $H^*(E',k)$ est un $H^*(B',k)$-module libre, donc, dans la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du fibré $F \to E' \xrightarrow{f'} B'$, on a $\tilde{E}_2^{-p} = \mathrm{Tor}^p_{H^*(B')}(k, H^*(E')) = 0$ si $p > 0$. La Proposition 4.4.1 appliquée à ce fibré donne le résultat.

REMARQUE 4.4.3. Soit un fibré de Serre $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{f} B$ vérifiant les hypothèses du Théorème 1.6. On suppose que E et B sont formels et que f est formelle. Les résultats du Chapitre II montrent que si f^* a pour modèle minimal bigradué $(\Lambda Z, d) \to (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d')$, on a un diagramme commutatif dont les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes

$$\begin{array}{ccccc} A(B) & \xrightarrow{A(f)} & A(E) & \xrightarrow{A(j)} & A(F) \\ \pi\uparrow & & \uparrow\pi' & & \uparrow\pi'' \\ (\Lambda Z, d) & \to & (\Lambda Z \otimes \Lambda X, d') & \to & (\Lambda X, d''). \end{array}$$

Ceci n'implique pas que F est formel.

Cependant, soit un fibré $F \to E \xrightarrow{f} B$ tel que E et B soient formels et f soit formelle, alors π'': $(\Lambda X, d'') \to A(F)$ est le modèle minimal de la fibre. Posons $_n(\Lambda X)^k = (\Lambda X)^k_{n-k}$, nous vérifions que, suivant la définition de **[2]**, la fibre F a un système de poids positifs.

THÉORÈME 4.4.4. *Soit $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{f} B$ un fibré où les espaces sont connexes par arcs, B est simplement connexe, $H^*(F, k)$ ou $H^*(B, k)$ est de type fini. Supposons que les espaces E et B soient formels et que f soit formelle. Si la suite spectrale de Serre collapse au terme E_2, alors la fibré F est formelle.*

DÉMONSTRATION. Il résulte de la formalité de f, et de la Proposition 4.4.2 que $(\Lambda X, d'')$ est le modèle minimal bigradué de $H^*(F)$ et le modèle filtré de F.

Citons enfin quelques applications du théorème fondamental dont certaines ont été obtenues par des méthodes différentes.

PROPOSITION 4.4.5. *Soit un carré fibré*

$$\begin{array}{ccc} F & = & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ E' = B' \times_B E & \to & E \\ f'\downarrow & & \downarrow f \\ B' & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

vérifiant les hypothèses du Théorème 1.7.

Supposons que les espaces E, B, B' soient formels et que les applications f et g soient formelles, alors la suite spectrale d'Eilenberg-Moore du carré fibré collapse au terme E_2; de plus on a:

$$H^*(E', k) = \mathrm{Tor}_{H^*(B,k)}(H^*(B', k), H^*(E, k)).$$

REMARQUE 4.4.6. La conclusion de la Proposition 4.4.5 peut être fausse si l'une des applications f ou g n'est pas formelle. En effet, soit la fibration de Hopf: $S^1 \to S^3 \xrightarrow{f} S^2$, elle n'est pas formelle. On calcule facilement le modèle filtré de f. La suite spectrale d'Eilenberg-Moore du fibré est isomorphe, grâce au Théorème 4.2.2, à une suite spectrale (E_i, d_i) définie sur $(\Lambda X, D'')$ telle que $E_2^{-2} \simeq k$, $E_2^0 \simeq k$ et d_2 est un isomorphisme de E_2^{-2} sur E_2^0.

Soit $G \to P \xrightarrow{f} B$ un G-fibré principal de classe C^∞ dont le groupe structural est un groupe de Lie G compact connexe et la base B est un C-W complexe de type fini. On sait **[10]** que ce fibré peut être considéré comme l'image réciproque du fibré universel $G \to E_G \xrightarrow{p} B_G$ par une application continue g: $B \to B_G$. De plus, g^*: $H^*(B_G, \mathbf{R}) \to H^*(B, \mathbf{R})$ est égal à l'homomorphisme de Weil $h_{\mathcal{P}}$.

On a $H^*(G, \mathbf{R}) = E(P_G)$, $H^*(B_G, \mathbf{R}) = S(Q_G)$ où $Q_G^{2n} = P_G^{2n-1}$, soit τ_G une transgression: $(P_G)^{2n-1} \xrightarrow{\sim} (Q_G)^{2n}$.

THÉORÈME 4.4.7. *Soit $G \to P \xrightarrow{f} B$ un tel G-fibré principal dont la base B est formelle. Alors on a*

$$H^*(P, \mathbf{R}) = \mathrm{Tor}_{H^*(B_G, \mathbf{R})}(H^*(B, \mathbf{R}), \mathbf{R}) = H^*(H^*(B) \otimes E(P_G), \delta')$$

où $\delta'_{|H^*(B)} = 0$, $\delta'(u) = h_{\mathcal{P}}\tau_G(u)$ si $u \in P_G$.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence des Théorèmes 4.2.5 et 4.4.5.

THÉORÈME 4.4.8. *Soit* $G \to P \xrightarrow{f} B$ *un G-fibré principal tel que G est un groupe de Lie compact connexe, et B est un C-W complexe de type fini. Si l'idéal* $(\operatorname{Im} h_{\mathcal{P}}^{+}).H^*(B)$ *peut être engendré par une suite régulière de m éléments homogènes de* $H^*(B, \mathbf{R})$, *alors on a un isomorphisme de k-algèbres graduées*:

$$H^*(P, \mathbf{R}) = \left[H^*(B)/ (\operatorname{Im} h_{\mathcal{P}}^{+}).H^*(B) \right] \otimes E(P'_G)$$

où P'_G *est un sous-espace vectoriel de* P_G *de codimension m.*

DÉMONSTRATION. Soit $(a_1, \ldots, a_m)$ une suite régulière de générateurs de l'idéal engendré par $\operatorname{Im} h_{\mathcal{P}}^{+}$. Quitte à faire un automorphisme sur $H^*(B) \otimes E(P_G)$, on peut toujours supposer qu'il existe un système libre de vecteurs de P_G, $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$, tel que $a_i = h_{\mathcal{P}}\tau_G(v_i)$. Soit P'_G un supplémentaire dans P_G du sous-espace P''_G engendré par les vecteurs $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$. Soit $(v_i)_{i \geqslant m+1}$ une base de P'_G.

Reprenons les notations et les conclusions du Théorème 4.2.5. Comme $\operatorname{Im} h_{\mathcal{P}}^{+}$ est engendré par $(a_1, \ldots, a_m)$, il existe, pour tout $i \geqslant m + 1$, des éléments $\alpha_{ji} \in \operatorname{Ker} d_B$ et $b_i \in A(B)$ tels que

$$\Delta'(1 \otimes v_i) = \sum_{j=1}^{m} (\alpha_{ji} \otimes 1)\Delta'(1 \otimes v_j) + d_B b_i \otimes 1,$$

pour tout $i \geqslant m + 1$. A l'aide d'un automorphisme d'ADGC respectant la filtration de $A(B) \otimes E(P_G)$, on peut supposer que $\Delta'(v_i) = 0$ pour $i \geqslant m + 1$. La sous-algèbre $A(B) \otimes E(P''_G)$ est une sous-algèbre différentielle graduée filtrée lorsqu'on la munit de la restriction de la différentielle Δ' et de la filtration induite. De plus, on a

$$H^*(P, \mathbf{R}) = H^*(A(B) \otimes E(P''_G), \Delta') \otimes E(P'_G).$$

La filtration de $(A(B) \otimes E(P''_G), \Delta')$ définit une suite spectrale dont le terme E_1 est $H^*(B) \otimes E(P''_G)$ et $d_1(v_i) = h_{\mathcal{P}}\tau_G(v_i)$. Par hypothèse, $(d_1(v_i))_{1 \leqslant i \leqslant m}$ forment une suite régulière d'éléments; le théorème principal de [13] (qui reste vrai si $H^*(B)$ contient des éléments en degrés impairs) implique que

$$E_2^{-p} = H_p(H^*(B) \otimes E(P''_G), d_1) = 0 \quad \text{si } p \neq 0,$$

$$E_2^0 = H_0(H^*(B) \otimes E(P''_G), d_1) = H^*(B)/ (d_1 v_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}.$$

Cette suite spectrale collapse donc au terme E_2, et de plus on a un isomorphisme d'algèbres graduées:

$$E_2^0 \simeq H^*(A(B) \otimes E(P''_G), \Delta').$$

BIBLIOGRAPHIE

1. H. J. Baues, *Obstruction theory on homotopy classification of maps*, Lecture Notes in Math., vol. 628, Springer-Verlag, Berlin and New York.

2. R. Body and D. Sullivan, *Homotopy types having positive weights*, (preprint).

3. A. Borel, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Ann. of Math. **57** (1953), 115–207.

4. H. Cartan, *La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal*, Colloque de Topologie (Bruxelles, 1950), Thone, Lièges; Masson, Paris, 1951, pp. 57–71.

5. ______, *Théories cohomologiques*, Invent. Math. **35** (1976), 261–271.

6. P. Deligne, J. Morgan, P. Griffiths and D. Sullivan, *The real homotopy theory of Kaehler manifolds*, Invent. Math. **29** (1975), 245–254.

7. S. Eilenberg and J C. Moore, *Homology and fibrations*, Comment. Math. Helv. **40** (1966), 199–236.

8. Y. Felix, *Classification homotopique des espaces rationnels à cohomologie donnée*, Thèse Université Catholique de Louvain, 1979.

9. E. Friedlander, P. Griffiths and J. Morgan, *Homotopy theory and differential forms*, Séminaire de Géométrie de Florence, 1972.

10. W. Greub, S. Halperin and R. Vanstone, *Connections, curvature and cohomology*. Vol. III, Academic Press, New York, 1976.

11. S. Halperin, *Lectures on minimal models*, Publications Internes de l'U.E.R. de Math. Pures de l'Université de Lille I, Vol. n° 111 (1977).

12. S. Halperin and J. Stasheff, *Obstructions to homotopy equivalence*, Advances in Math. **32** (1979), 233–279.

13. M. C. Heydemann and M. Vigué, *Application de la théorie des polynômes de Hilbert-Samuel à l'étude de certaines algèbres différentielles*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A **278** (1974), 1607–1610.

14. D. Lehmann, *Théorie homotopique des formes différentielles*, Astérisque **45** (1977).

15. J.-P. Serre, *Homologie singulière des espaces fibrés*, Ann. of Math. **54** (1951), 425–505.

16. L. Smith, *Homological algebra and the Eilenberg-Moore spectral sequence*. Trans. Amer. Math. Soc. **129** (1967), 58–93.

17. D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **47** (1977).

18. M. Vigué-Poirrier, *Quelques problèmes d'homotopie rationnelle*, Thèse d'Etat Université des Sciences et Techniques de Lille I (déc. 1978).

MATHÉMATIQUES, BAT. 425, UNIVERSITÉ DE PARIS SUD, F 91405 ORSAY, CÉDEX, FRANCE